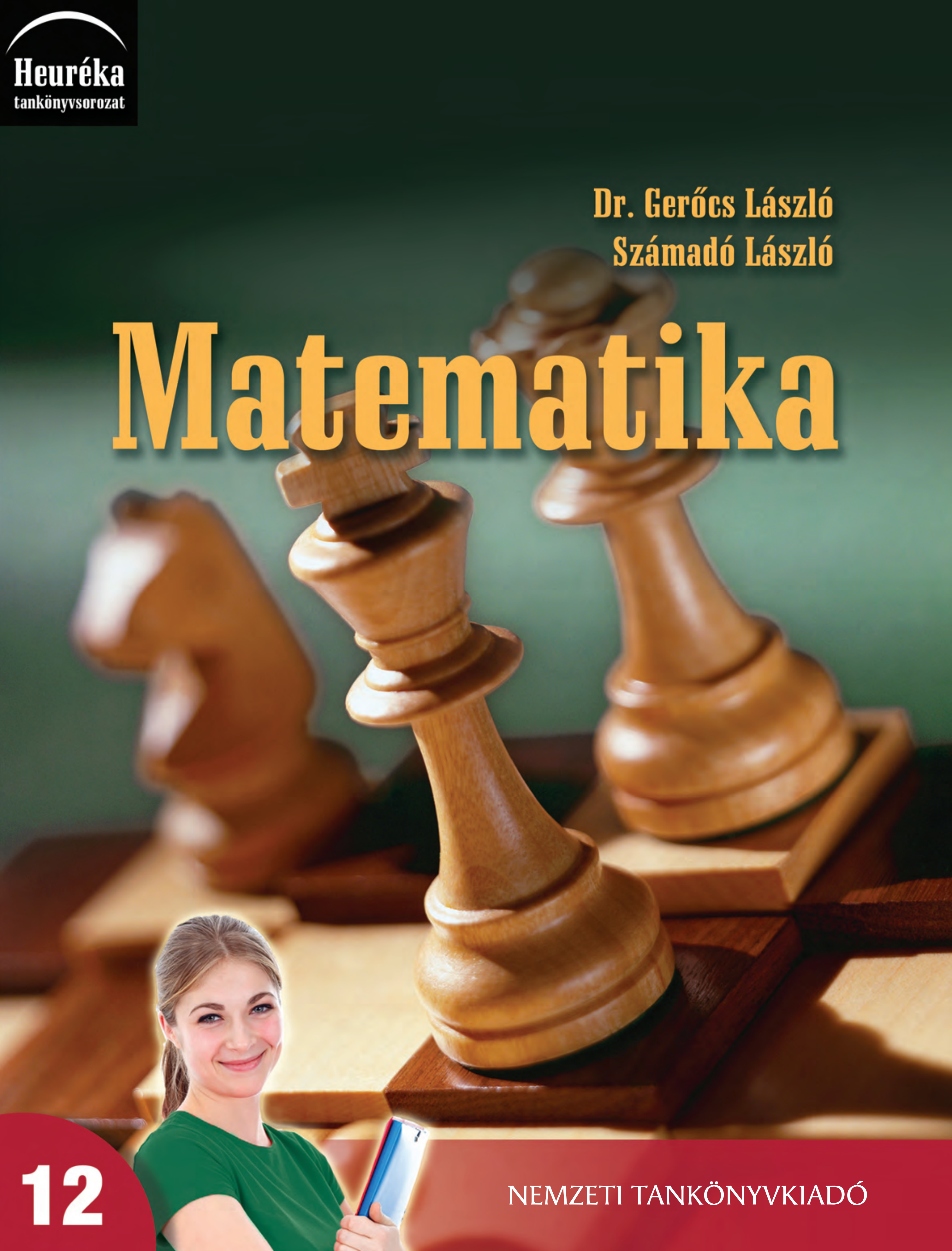
Heuréka
tankönyvsorozat

Dr. Gerőcs László
Számadó László

Matematika

12

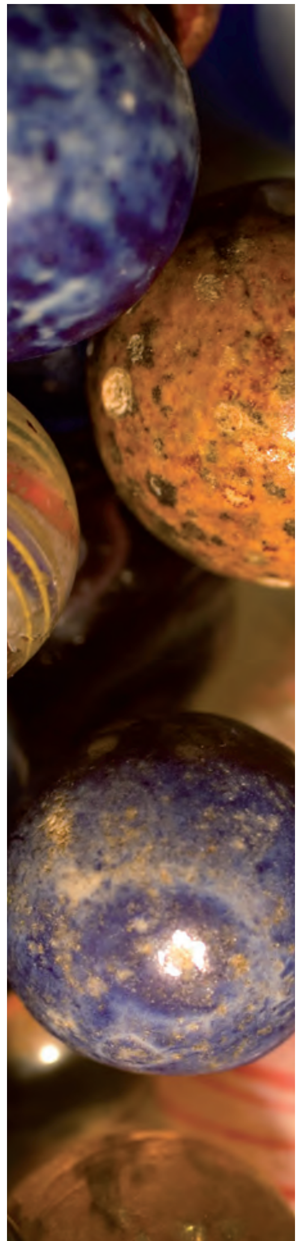


NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ

Dr. Gerőcs László ▪ Számadó László

Heuréka

MATEMATIKA



A középiskolák 12. évfolyama számára

Nemzeti Tankönyvkiadó ▪ Budapest

A könyv megfelel az Oktatási Minisztérium kerettantervének [17/2004. (V. 20.) 3. számú melléklet] és az érettségi vizsga követelményeinek [40/2004. (V. 24.)].

Lektor: Pálfalvi Józsefné

Felelős szerkesztő: Tóthné Szalontay Anna

Tipográfia: Lőrincz Attila

Fedél: Korda Ágnes

Szakgrafika: Dr. Fried Katalin

Fotók: NTK-archívum, valamint:
aldoaldoz, forrás: flickr.com (90. o.); *alles-schlumpf,* forrás: flickr.com (28. o., fent); *andreas.hopf,* forrás: flickr.com (75. o.); *AvgeekJoe,* forrás: flickr.com (95. o., fent); *Ben+Sam,* forrás: flickr.com (95. o., jobbra lent); *El Bingle,* forrás: flickr.com (50. o., középen); *Stewart Black,* forrás: flickr.com (179. o., lent); *BotheredByBees,* forrás: flickr.com (28. o., lent); *CarbonNYC,* forrás: flickr.com (47. o.); *Chiot's Run,* forrás: flickr.com (21. o.); *DaveOnFlickr,* forrás: flickr.com (52. o., jobbra lent); *DavGoss,* forrás: flickr.com (27. o.); *Diueine,* forrás: flickr.com (58. o.); *efekt,* forrás: flickr.com (103. o.); *eyDanielle,* forrás: flickr.com (77. o.); *fdecomite,* forrás: flickr.com (64. o.); *fotogake,* forrás: flickr.com (14. o.); *Gisling,* forrás: wiki.en (63. o.); *Dave Goodman,* forrás: flickr.com (8. o.); *Gubbubu,* forrás: wiki.hu (127. o., balra); *Olivier Hill,* forrás: flickr.com (106. o., fent); *johncudw2399,* forrás: flickr.com (37. o.); *joncandy,* forrás: flickr.com (106. o., lent); *jondresner,* forrás: flickr.com (102. o.); *DG Jones,* forrás: flickr.com (49. o., fent); *jon.hayes,* forrás: flickr.com (105. o.); *kahunapulej,* forrás: flickr.com (94. o.); *keepps,* forrás: flickr.com (119. o., lent); *Kettukusu,* forrás: flickr.com (23. o., középen); *kimberlykv,* forrás: flickr.com (50. o., lent); *korom,* forrás: flickr.com (52. o., balra lent); *kurafire,* forrás: flickr.com (7. o. fent); *labomatic,* forrás: flickr.com (49. o., lent); *Siddy Lam,* forrás: flickr.com (7. o. jobbra lent); *malczyk,* forrás: flickr.com (25. o., fent); *mandydax,* forrás: flickr.com (55. o.); *Mark Marathon,* forrás: wiki.en (44. o.); *MissTurner,* forrás: flickr.com (70. o.); *Annie Mole,* forrás: flickr.com (12. o. lent); *NASA's Marshall Space Flight Center,* forrás: flickr.com (89. o., lent); *ella novak,* forrás: flickr.com (88. o.); *Olira,* forrás: dreamstime.com (149. o.); *Chrys Omori,* forrás: flickr.com (12. o. fent); *Oregon Department of Fish & Wildlife,* forrás: flickr.com (43. o.); *OZinOH,* forrás: flickr.com (65. o., lent); *Parrot of Doom,* forrás: wiki.en (7. o. balra lent); *petitshoo,* forrás: flickr.com (1. o.); *rachelandrew,* forrás: flickr.com (179. o., középen); *robfromamersfoort,* forrás: flickr.com (133. o.); *Helder da Rocha,* forrás: flickr.com (143. o.); *rosepetal236,* forrás: flickr.com (30. o., fent és lent); *Ruddington Photos,* forrás: flickr.com (150. o.); *rwentechaney,* forrás: flickr.com (119. o., fent); *salendron,* forrás: flickr.com (18. o.); *Satyadasa,* forrás: flickr.com (158. o.); *sez9,* forrás: flickr.com (10. o. fent); *Joe Shlabotnik,* forrás: flickr.com (23. o., fent); *Sie,* forrás: wiki.hu (127. o., jobbra); *slayerphoto,* forrás: flickr.com (16. o.); *Bruce A Stockwell,* forrás: flickr.com (17. o.); *Thingo,* forrás: flickr.com (115. o.); *thoth188,* forrás: flickr.com (66. o., lent); *USFWS Mountain Prairie,* forrás: flickr.com (50. o., fent); *Lukas Vermeer,* forrás: flickr.com (10. o. lent); *Ernst Vikne,* forrás: flickr.com (85. o.); *watz,* forrás: flickr.com (65. o., fent); *Aidan Whiteley,* forrás: flickr.com (52. o., fent); *H.C. Williams,* forrás: flickr.com (66. o., fent); *wuji9981,* forrás: flickr.com (9. o.); *Ken Yonekura,* forrás: flickr.com (76. o.); *Paulo Henrique Zioli,* forrás: flickr.com (25. o., jobbra lent); *401K,* forrás: flickr.com (48. o.); *@Doug88888,* forrás: flickr.com (178. o.); *hu.wikipedia.org* (22. o., portré, 33. o.); *hu.wikipedia.org,* Copyright Computer Laboratory, *University of Cambridge* (22. o., másik kép)

ISBN 978-963-19-6102-7

Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt. a Sanoma company
www.ntk.hu • Vevőszolgálat: info@ntk.hu •Telefon: 06 80 200 788

A kiadásért felel: Kiss János Tamás vezérigazgató • Raktári szám: 16402
Műszaki igazgató: Babicsné Vasvári Etelka • Műszaki szerkesztő: Orlai Márton •
Grafikai szerkesztő: Mikes Vivien • Terjedelem: 25,75 (A/5) ív • Tömeg: 600 gramm •
1. kiadás, 2012 • Nyomdai előkészítés: PGL Grafika Bt.

Nyomtatta és kötötte az Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen • Felelős vezető: György Géza vezérigazgató
A nyomdai megrendelés törzsszáma:

Tartalom

Jelmagyarázat 5
Bevezetés 6

I. **Matematikai logika** 7
1. A matematikai logika alapfogalmai 8
2. Logikai műveletek 11
3. Műveleti tulajdonságok 15
4. Még két logikai művelet 18
5. Alkalmazások 20

II. **Számsorozatok** 25
1. Számsorozat fogalma, megadási módja 26
2. Teljes indukció 29
3. A számtani sorozat 31
4. A számtani sorozat első *n* tagjának összege 35
5. A mértani sorozat 38
6. A mértani sorozat első *n* tagjának összege 41
7. Összetett feladatok számtani és mértani sorozatokra 44
8. Kamatos kamat 47

III. **Kerület, terület, felszín, térfogat** 51
1. Néhány síkidom kerülete, területe 52
2. Görbék ívhossza, síkidomok kerülete, területe 60
3. Testek felszíne 64
4. Testek térfogata 71
5. Hengerszerű és kúpszerű testek 76
6. Csonkagúla és csonkakúp 81
7. A gömb 85
8. Térbeli számítások 90

IV. **Rendszerező összefoglalás** 95
1. Gondolkodási módszerek 96
   A) Halmazok 96
   B) Kombinatorika 101
   C) Gráfok 103
2. Algebra 106
   A) Műveletek, műveleti tulajdonságok, fontosabb azonosságok 106
   B) A természetes számok halmaza, oszthatóság 109
   C) Gyökvonás, hatványozás, logaritmus 112
   D) Elsőfokú egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek 116
   E) Másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek 120
   F) Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek 124
3. Geometria 127
   A) Bevezetés a geometriába 127
   B) Geometriai transzformációk 130
   C) A háromszögekről tanultak áttekintése 134
   D) A sokszögek és a kör 137

E) Vektorok 141
4. Trigonometria 144
5. Koordináta-geometria 151
A) Vektorok a koordináta-rendszerben, osztópontok, két pont távolsága 151
B) Az egyenes egyenletei 154
C) A kör egyenlete, kör és egyenes kölcsönös helyzete 158
6. Függvények 162
A) Függvénytani alapfogalmak, függvénytulajdonságok 162
B) Elemi függvények 163
C) Függvénytranszformációk 167
7. Statisztika 171
8. Valószínűség-számítás 174

V. **Középszintű gyakorló érettségi feladatsorok** 180
1. feladatsor 180
2. feladatsor 183
3. feladatsor 185
4. feladatsor 187
5. feladatsor 190
6. feladatsor 192
7. feladatsor 194
8. feladatsor 197

Fogalomtár 200

Jelmagyarázat

Az *A* pont és az *e* egyenes távolsága: $d(A; e)$ vagy Ae

Az *A* és *B* pont távolsága: AB vagy $\overline{AB}$ vagy $d(A; B)$

Az *A* és *B* pont összekötő egyenese: $e(A; B)$

Az f_1 és f_2 egyenesek szöge: $\sphericalangle(f_1; f_2)$ vagy $(f_1; f_2)\sphericalangle$

A *C* csúcspontú szög, melynek egyik szárán az *A*, másik szárán a *B* pont található: $ACB\sphericalangle$

A *C* csúcspontú szög: $C\sphericalangle$

Szög jelölése: α, β, γ, …

Az *A*, *B* és *C* csúcsokkal rendelkező háromszög: $ABC\triangle$

Az $ABC\triangle$ területe: $T(ABC)$ vagy T_{ABC}

Az *a*, *b* és *c* oldalú háromszög fél kerülete:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

A derékszög jele: ⊾

Az *e* egyenes merőleges az *f* egyenesre: $e \perp f$

Az *e* egyenes párhuzamos az *f* egyenessel: $e \parallel f$

Egybevágóság: $\cong$; $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$

A hasonlóság aránya: λ

Az *A* pontból a *B* pontba mutató vektor: $\overrightarrow{AB}$

Egyenlő, nem egyenlő: $=$, $\neq$; $a = 2$, $b \neq 5$

Azonosan egyenlő: $\equiv$; $a + b \equiv 5$

Közelítőleg egyenlő: $\approx$; $a \approx 2{,}3$; $8{,}54 \approx 8{,}5$

Kisebb, kisebb vagy egyenlő: $<$, $\leq$; $2 < 3$, $5 \leq x$

Nagyobb, nagyobb vagy egyenlő: $>$, $\geq$; $6 > 4$, $a \geq 2$

A természetes számok halmaza: **N**; {0; 1; 2; …}

Az egész számok halmaza: **Z**; {…; –2; –1; 0; 1; 2; …}

A pozitív, a negatív egész számok halmaza: $\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{Z}^-$; {1; 2; 3; …}, {–1; –2; –3; …}

A racionális, az irracionális számok halmaza: **Q**, $\mathbf{Q}^*$

A pozitív, a negatív racionális számok halmaza: $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{Q}^-$

A valós számok halmaza: **R**

A pozitív, a negatív valós számok halmaza: $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$

Eleme, nem eleme a halmaznak: $\in$, $\notin$; $5 \in \mathbf{N}$, $-2 \notin \mathbf{Z}^+$

Részhalmaz, valódi részhalmaz: $\subseteq$, $\subset$; $A \subseteq \mathbf{R}$, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$

Zárt intervallum: $[a; b]$

Balról zárt, jobbról nyílt intervallum: $[a; b[$

Balról nyílt, jobbról zárt intervallum: $]a; b]$

Nyílt intervallum: $]a; b[$

Az *x* szám abszolút értéke: $|x|$; $|-3{,}1| = 3{,}1$

Az *f* függvény hozzárendelési szabálya: $f\colon x \mapsto f(x)$; $f\colon x \mapsto 2x + 3$ vagy $f(x) = 2x + 3$; $f(x) = y$; $y = 2x + 3$

Az *f* függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen: $f(x_0)$; $f(5)$, ha $x_0 = 5$

n faktoriális: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

a alapú logaritmus: $\log_a x$

10-es alapú logaritmus: $\lg x$

e alapú logaritmus: $\ln x$

Binomiális együttható, *n* alatt a *k*: $\binom{n}{k}$

Az *x* szám négyzetgyöke: $\sqrt{x}$

Az *x* szám *n*-edik gyöke: $\sqrt[n]{x}$

Állítás: *A*, *B*

Állítás logikai értéke: $|A| = \text{i}$, $|B| = \text{h}$

Tagadás (negáció) jele: $\neg$, $\neg A$ (nem *A*)

Konjukció jele: $P \wedge Q$ (*P* és *Q*)

Diszjunkció jele: $P \vee Q$ (*P* vagy *Q*)

Implikáció jele: $\rightarrow$, $A \rightarrow B$ vagy $\Rightarrow$, $A \Rightarrow B$

Ekvivalencia jele: $\leftrightarrow$, $A \leftrightarrow B$ vagy $\Leftrightarrow$, $A \Leftrightarrow B$

a_n a sorozat *n*. tagja

n a sorozat tagjainak a száma

d a számtani sorozat differenciája (különbsége)

S_n a sorozat első *n* tagjának az összege

q a mértani sorozat kvóciense (hányadosa)

r sugár

d átmérő

P palást

T terület

A felszín

V térfogat

Bevezetés

A tankönyv célja a középszintű érettségire történő felkészítés. A matematikai szemlélet fejlesztése a *definíciókhoz* és *fogalmakhoz* kapcsolódó *tananyagelemek* kidolgozásával történik.

Kidolgozott példák segítik az új ismeretek bevezetését, a tananyag megértését. A fejezetek végén gyakorlófeladatokat találunk, melyek segítik a középszintű érettségire való felkészülést.

A középiskolai tanulmányok során a korábban szemléletesen, tevékenységek segítségével kialakított fogalmak megerősítésére, bizonyos fogalmak definiálására, általánosítására kerül sor. Kidolgozzuk a különböző témakörökben megismert összefüggések *más témakörökben* való felhasználhatóságának felismerését, a matematika alkalmazását *gyakorlati problémák megoldása során. Illusztrációkkal, fényképekkel* segítjük a tananyagban a matematikai összefüggések megértését.

A tanítandó anyagban *sejtéseket* fogalmazunk meg, melyek néhány lépésben bizonyíthatók vagy megcáfolhatók. Fontos a *bizonyítás* iránti igény felkeltése. Sor kerül néhány egyszerű tétel bizonyítására, bizonyítási módszerek megismerésére, valamint a *fogalmak, szabályok pontos megfogalmazására.* (Ezeket a tankönyvben kék tónussal jelöltük.)

Kékkel emeltük ki a szövegben a matematikatörténeti és egyéb matematikai érdekességeket. *(Javasoljuk a téma további feldolgozását az internet segítségével!)*

A problémaérzékenységre, a *problémamegoldásra nevelés* fontos feladatunk. Ehhez elengedhetetlen egyszerű *matematikai szövegek értelmezése,* elemzése. A diszkussziós képesség fejlesztése, a többféle megoldás keresése, megtalálása és megbeszélése a *logikus gondolkodást* is fejleszti.

A tankönyv végén 8 középszintű érettségire felkészítő gyakorló feladatsor található, melyeknek részletes megoldása ingyenesen letölthető a tankönyvi megoldásokkal együtt a Nemzeti Tankönyvkiadó honlapjáról. A tankönyvben a teljes középiskolai tananyag összefoglalása is megtalálható, segítve ezzel a középszintű érettségire való felkészülést.

Az *érettségire való felkészítést* a négy évfolyamon végigfutó kidolgozott példák és nehézségük szerint szintezett feladatok segítik:

- **K1** középszint, könnyebb;
- **K2** középszint, nehezebb;
- **E1** emelt szint, könnyebb;
- **E2** emelt szint, nehezebb feladat.

Az emelt szintű érettségi vizsgán előforduló tananyagokat zölddel és apró betűvel jelöltük.

A leckék végén lévő feladatok részletes megoldása megtalálható a világhálón, a *www.ntk.hu* weboldalon.

Az érdeklődők, vagy gyakorolni vágyók számára a leckék végén még *további feladatokat* is ajánlunk, amelyeket a Nemzeti Tankönyvkiadó *MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény* családjából jelöltünk ki.

Gerőcs László–Orosz Gyula–Paróczay József–Szászné Dr. Simon Judit:

16125/I (+ CD-n a megoldások)	MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.
16125/II	MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I., Megoldások
16126/I (+ CD-n a megoldások)	MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.
12126/II	MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II., Megoldások

Czapáry Endre–Czapáry Endréné–Csete Lajos–Hegyi Györgyné–Iványiné Harró Ágota–Morvai Éva–Reiman István:

16127/I (+ CD-n a megoldások)	MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III:, *Geometriai feladatok gyűjteménye*
16127/II	MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III., Megoldások, *Geometriai feladatok gyűjteménye*

I. Matematikai logika

A gondolkodás tudománya – a logika – már az ókorban is megjelent, hiszen a tudományok fejlődése szükségessé tette az emberi gondolkodás vizsgálatát. Kiemelkedő fontosságú *Arisztotelész* (Kr.e. 384 – 322) logikáról írt műve. Ismerte a korábbi idők szellemi alkotásait, és kereste a tudományos kutatásokhoz az emberi gondolkodás által követendő módszereket. Természetesen ennek a munkásságnak is vannak előzményei. Matematikatörténeti kutatások alapján akár évszázadokat is haladhatunk vissza az időben az eredetet keresni.

A logika módszere hosszú ideig szinte semmit nem változott. *Aquinói Szent Tamás* (1225–1274) megteremtette az arisztotelészi világkép és a keresztény teológia összhangját. A tizenkilencedik században *Georg Boole* (1815–1864) *A gondolkodás törvényei* című munkájával elkezdődik a matematikai logika kialakítása.

A matematikai logika területén a magyar matematikusok is maradandót alkottak. *Péter Rózsa* (1905–1977) már az 1930-as években jelentős eredményeket ért el ezen a területen. *Kalmár László* (1905–1976) neve világszerte megjelenik egyetemi szintű logikatankönyvekben (Kalmár-féle bizonyítás, Kalmár-féle függvényosztály). *Neumann János* (1903–1957) pedig az első elektronikus számítógép megépítéséhez a teljes logikai apparátust felhasználta.

1. A matematikai logika alapfogalmai

A matematikai logikában a kijelentő mondatok nagyon fontosak. Ezek között kiemelkedő jelentőségűek azok, amelyekről eldönthető, hogy igazak vagy hamisak.

Állítás

Állítás

Állításnak (kijelentésnek, ítéletnek) nevezzük azt a kijelentő mondatot, melyről egyértelműen eldönthető, hogy vagy igaz, vagy hamis.

Állítás logikai értéke

Állítás logikai értéke

Egy állítással kapcsolatban az *igaz*-at, a *hamis*-at az állítás logikai értékének nevezzük.

Az állításokat az élet bármely területéről vehetjük. A továbbiakban ezeket a kijelentő mondatokat egy-egy nagybetűvel fogjuk jelölni, így rövidebben tudunk róluk beszélni.

$|A| = i$

$|B| = h$

Ha az A állítás logikai értéke igaz, azt így jelöljük: $|A| = i$.
Ha a B állítás logikai értéke hamis, azt így jelöljük: $|B| = h$.

1. példa Adjuk meg a logikai értékét a következő állításoknak!
A: A 12 páros szám.
B: Ma szerda van.
C: Most itt havazik.
D: Minden prímszám páratlan.
E: Az ikerprímszámok száma végtelen.

Megoldás
Az A állítás igaz, a D hamis. Jelöléseinkkel: $|A| = i$, $|D| = h$.
A B és a C állítás logikai értékét ebben a könyvben nem tudjuk megadni. Az olvasó természetesen a szöveg olvasásának pillanatában eldöntheti, hogy igaz vagy hamis állításról van-e szó. Előfordul, hogy bizonyos kijelentésekről még nem tudjuk, hogy igazak-e vagy hamisak. Mégis feltesszük, hogy egyértelműen eldönthető róluk igaz, vagy hamis voltuk.
Az E kijelentő mondatról e sorok írásakor még nem tudtuk, hogy igaz vagy hamis, de ezt is állításnak tartjuk.

2. példa Döntsük el a következő mondatokról, hogy állítások-e!
A: Vigyázz, mély víz!
B: Mi volt a házi feladat?
C: Erre ment.
D: Számítsuk ki a 3 cm oldalhosszúságú négyzet kerületét!
E: Van egy piros tollad?
F: Petőfi Sándor legszebb verse a *Szülőföldemen*.
G: Holnap szép idő lesz.

Megoldás
A felsorolt hét mondat közül a nem kijelentő mondatok nem lehetnek állítások: A, B, D, E.
A C kijelentő mondat hiányos, meghatározhatatlan a logikai értéke.
Az F kijelentő mondatban a legszebb vers nem definiálható, ilyen értelemben bizonytalan a jelentése.

A G nyelvtani értelemben kijelentő mondat. Van, amikor a körülmények ismeretének hiánya, vagy a mondatban rejlő bizonytalan jelentésű szavak miatt nem eldönthető, hogy igaz, vagy hamis. Ez is egy ilyen mondat.
Ezen mondatok egyike sem állítás.

Az 1. példában olyan kijelentéseket olvashattunk, amelyek nem bonthatók fel részekre. Egyiket sem alakíthatjuk át úgy, hogy azt két kijelentés összekapcsolásának tekintsük.
Ezek az **egyszerű állítások**.

Egyszerű állítások

Nézzük a következő állításokat!
A: A 9 prímszám.
Tudjuk, hogy $|A| = |$A 9 prímszám.$| = h$.
Ez a szövegezés azonban furcsa a számunkra, természetesebbnek érezzük a következőt:
B: A 9 nem prímszám.
Tudjuk, hogy $|B| = |$A 9 nem prímszám.$| = i$.
Ha az *A* és a *B* állítást összehasonlítjuk, akkor egyszerűen azt mondjuk, hogy a *B* állítás az *A* tagadása.
Az előző példa állításai közötti kapcsolat röviden: a *B* egyenlő *nem A*.
A tagadás egy logikai művelet. A tagadással egy új állítást kapunk.
A tagadás műveletének jele: $\neg$. Például: $\neg A$ jelentése és kiolvasása: *nem A*.

Tagadás jele: $\neg$
$\neg A$ (*nem A*)

Kilencedik osztályban már megnéztük, hogy a matematikai nyelvezet sokszor eltér a köznapi szóhasználattól. Ha például valamire azt mondjuk, hogy nem jó, akkor azt rendszerint úgy értjük, hogy rossz. A matematikában a nem jó csak annyit jelent, hogy nem jó. A köznyelv nem különbözteti meg az állítás tagadását és az állítás ellentétét.
A következő táblázatban erre láthatunk példákat.

Az állítás	tagadása	ellentéte	de lehetne ez is
jó	nem jó	rossz	közömbös
negatív	nem negatív	pozitív	nulla
fekete	nem fekete	fehér	zöld
süt a nap	nem süt a nap	felhős az ég	éjszaka van
páros	nem páros	páratlan	törtszám

3. példa Adjuk meg a következő állítások tagadását!
A: Hull a hó.
B: Minden osztálytársam fiú.
C: Minden háromszögnek van derékszöge.

Megoldás
$\neg A$: Nem igaz, hogy hull a hó. Vagyis: Nem hull a hó.
$\neg B$: Nem igaz, hogy minden osztálytársam fiú. Vagyis: Van lány osztálytársam.
$\neg C$: Nem igaz, hogy minden háromszögnek van derékszöge. Vagyis: Van olyan háromszög, amelynek nincs derékszöge.

Feladatok

1. K1 Döntsük el a következő mondatokról, hogy állítások-e!
A: Vigyázz, a kutya harap!

B: Milyen színű inget vettél?
C: Odatettem.
D: Számítsuk ki a szabályos háromszög területét, ha a magassága 5 cm hosszú!
E: Ez egy barna kabát?
F: Holnap nem fog esni az eső.

2. K1 Döntsük el a következő mondatokról, hogy állítások-e! Állítás esetén adjuk meg a logikai értékét!
A: Kétszer kettő néha öt.
B: Két út van előttem, melyiken induljak?
C: Száz forintnak ötven a fele.
D: Szabad a madárnak ágról ágra szállni.

3. K1 Adjuk meg a logikai értékét a következő állításoknak!
A: A 11 páratlan szám.
B: A 267 osztható 3-mal.
C: A deltoid olyan négyszög, amelynek van derékszöge.
D: A pókoknak hat lába van.
E: A *Talán eltűnök hirtelen* verssort József Attilánál olvashatjuk.
F: A kadmium vegyjele Ca.
G: Edelényen keresztül folyik a Bódva.
H: Wass Albert egyik regényének címe a *Tizenhárom almafa*.
A döntésekhez használhatunk szakirodalmat, világhálót!

4. K1 A következő állítások tartalma megegyezik egy-egy közmondásunkkal. Adjuk meg a közmondásokat a szokásos alakban!
A: Sok liba diadalmaskodik a sertés fölött.
B: Az ebet ezen a helyen hantolták el.
C: A valótlant állítót gyorsabban utolérik, mint a járáshibás ebet.
D: Az év ötödik hónapjában hulló cseppfolyós halmazállapotú csapadék értéke az arannyal egyező.

5. K1 Írjuk fel a következő szavak tagadását, majd adjuk meg egy-egy ellentétüket is!
a) magas; *b)* buta; *c)* vékony; *d)* szögletes; *e)* kicsi; *f)* csúnya.

6. K2 Írjuk fel a következő állítások tagadását! Döntsük el, hogy melyik igaz: az állítás vagy a tagadása!
A: Minden természetes szám pozitív.
B: Minden paralelogrammában a két átló egyenlő hosszú.
C: Minden 3-mal osztható szám osztható 9-cel.
D: Van olyan háromszög, amelynek csak egy hegyesszöge van.
E: Van olyan háromszög, amelynek pontosan két oldala egyenlő hosszúságú.
F: Öt egymást követő páratlan szám mindegyike lehet prímszám.

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: 1–18.

2. Logikai műveletek

Az előző leckében láttuk, hogy az állítás tagadásával egy új állítást hozunk létre. Felmerül a kérdés, hogy egyszerű állítások valamilyen nyelvtani összekapcsolásával képezhetünk-e új állításokat? A következőkben ezt fogjuk megvizsgálni.
A logika fő célja a helyes következtetések megtalálása. A matematikaórákról felidézünk két példát, amelyeket helyes következtetésnek tartunk.

a) Ha egy egész szám osztható kettővel és osztható hárommal, akkor osztható hattal.
Ez az egész szám nem osztható hárommal.
Tehát ez az egész szám nem osztható hattal.

b) Ha egy háromszögnek van 60°-os szöge és van szimmetriatengelye, akkor ez a háromszög szabályos.
Ennek a háromszögnek nincs szimmetriatengelye.
Tehát ez a háromszög nem szabályos.

Két tartalmában eltérő, de nagyon hasonló szerkezetű következtetést olvashattunk. Fogalmazzuk meg ezt a közös szerkezetet:
Ha *A* és *B*, akkor *C*.
Nem *B*.
Tehát nem *C*.
Az *A*, *B*, *C* a szokásos módon egy-egy állítást jelöl, amelyeknek logikai értéke vagy igaz, vagy hamis. Megjelentek továbbá a szövegben az úgynevezett logikai kapcsolószavak: *nem*; *és*; *ha* …, *akkor* … . Ezek a szavak olyan **logikai művelet**eket jelölnek, amelyekkel az egyszerű állításokból **összetett állítás**ok készíthetők. Láthattuk, hogy ez a következtetések szerkezetének vizsgálatakor is hasznos.

Összetett állítások

Nézzük a leggyakrabban előforduló logikai műveleteket!

I. A TAGADÁS

A tagadás

A tagadás – mint már korábban láttuk – az egyik legegyszerűbb logikai művelet.

1. példa Adjuk meg a következő állítások logikai értékét:
A: A 8 összetett szám;
B: A 8 nem összetett szám;
C: A paralelogramma rombusz;
D: A paralelogramma nem rombusz!

Megoldás
$|A| = i$;
$|B| = h$;
$|C| = h$;
$|D| = i$.

Egy állítás tagadása szakszóval: **negáció**.

Negáció

Negáció (tagadás)

Negáció (tagadás)

Egy tetszőleges *P* állítás negációján (tagadásán) a *nem P* (*nem igaz, hogy P*) állítást, vagy ennek valamilyen átfogalmazott alakját értjük.
A *P* állítás negációjának jelölését már az előző leckében bevezettük: $\neg P$ (olvasd: *nem P*).

Az 1. példában tapasztaltakat általánosságban is megfogalmazhatjuk:
Ha a *P* állítás igaz, akkor a *P* negáltja (a *nem P*) hamis.
Ha a *P* állítás hamis, akkor a *P* negáltja (a *nem P*) igaz.

A negáció műveletét a következő értéktáblázat definiálja:

P	$\neg P$
i	***h***
h	***i***

A negáció ismeretében könnyen belátható a következő azonosság: $\neg(\neg A) = A$.

A kettős tagadás törvénye

Ez a **kettős tagadás törvénye**.
Az előzőek alapján a következő két állításnak a logikai értéke egyenlő:
A: Elolvastam ezt a definíciót.
B: Nem igaz, hogy nem olvastam el ezt a definíciót.
Ugyanazt a tartalmat fejezi ki mindkét mondat. A beszélt nyelvben természetesen különböző nyomatékkal, különböző helyzetekben mondhatjuk ezeket a kijelentéseket.

II. KONJUNKCIÓ

Két egyszerű állítást összekapcsolhatunk az **és** kötőszóval. Ez a logikai művelet a **konjunkció**.

Konjunkció

$P \wedge Q$
(P és Q)

Konjunkció

Tetszőleges *P*, *Q* állítások konjunkcióján a *P* és *Q* állítást, vagy ennek valamilyen átfogalmazott alakját értjük.
A *P* és a *Q* állítás konjunkciójának jelölése: $P \wedge Q$ (olvasd: *P* és *Q*).

2. példa Adjuk meg a következő összetett állítások logikai értékét!
A: A derékszögű háromszög leghosszabb oldala az átfogó, és a legnagyobb szöge derékszög.
B: A 3 prímszám és a 11 osztható 3-mal.
C: A 90°-nak nem értelmezhető a tangense és a kotangense.
D: A háromszög belső szögeinek összege 360°, és a külső szögek összege pedig 180°.

Megoldás
P: A derékszögű háromszög leghosszabb oldala az átfogó. $|P| = i$,
Q: A derékszögű háromszög legnagyobb szöge derékszög. $|Q| = i$.
Az összetett állítás logikai értéke: $|A| = |P \wedge Q| = i$.

P: A 3 prímszám. $|P| = i$,
Q: A 11 osztható 3-mal. $|Q| = h$.
Az összetett állítás logikai értéke: $|B| = |P \wedge Q| = h$.

P: A 90°-nak nem értelmezhető a tangense. $|P| = i$.
Q: A 90°-nak nem értelmezhető a kotangense. $|Q| = h$,
Az összetett állítás logikai értéke: $|C| = |P \wedge Q| = h$.

P: A háromszög belső szögeinek összege 360°. $|P| = h$,
Q: A háromszög külső szögeinek összege 180°. $|Q| = h$.
Az összetett állítás logikai értéke: $|D| = |P \wedge Q| = h$.

A 2. példában szerzett tapasztalataink alapján a konjunkció értéktáblázata a következő:

A konjunkció $P \wedge Q$ értéktáblázata

P	Q	$P \wedge Q$
i	i	$\boldsymbol{i}$
i	h	$\boldsymbol{h}$
h	i	$\boldsymbol{h}$
h	h	$\boldsymbol{h}$

Vagyis a $P \wedge Q$ állítás pontosan akkor hamis, ha a két összetevő közül legalább az egyik hamis.
A $P \wedge Q$ állítás akkor és csak akkor igaz, ha mindkét összetevő igaz.

III. DISZJUNKCIÓ

Két egyszerű állítást összekapcsolhatunk a **vagy** kötőszóval is. Ez a logikai művelet a **diszjunkció**.

Diszjunkció

Diszjunkció

Tetszőleges *P*, *Q* állítások diszjunkcióján a *P vagy Q* állítást, vagy ennek valamilyen átfogalmazott alakját értjük.
A P és a Q állítás diszjunkciójának jelölése: $P \vee Q$ (olvasd: P vagy Q).

$P \vee Q$
(P vagy Q)

A *vagy* kötőszó használata nagy figyelmet kíván. Ezt két állítás segítségével mutatjuk meg.
A: Péter most rendet rak az asztalán, vagy zenét hallgat.
A mondat szerint lehetséges, hogy Péter
1. rendet rak az asztalán, de nem hallgat zenét;
2. nem rak rendet az asztalán, de zenét hallgat;
3. a rendrakással egy időben zenét is hallgat.

A *vagy* kötőszónak ez a használata a **megengedő vagy**.

Megengedő vagy

B: Péter most kitakarítja a szobáját, vagy elmegy bevásárolni.
Most a mondat értelméből következik, hogy Péter mindkettőt egyszerre nem teheti.
A *vagy* kötőszónak ez a használata a **kizáró vagy**.

Kizáró vagy

A diszjunkcióban a *megengedő vagy*-ot használjuk!

3. példa Adjuk meg a következő összetett állítások logikai értékét!
A: A 63-nak a 3 vagy a 7 osztója.
B: A 63-nak a 3 vagy a 13 osztója.
C: A 63-nak a 2 vagy a 7 osztója.
D: A 63-nak a 2 vagy az 5 osztója.

Megoldás

P: A 63-nak a 3 osztója. $|P| = i$,
Q: A 63-nak a 7 osztója. $|Q| = i$.
Az összetett állítás logikai értéke: $|A| = |P \lor Q| = i$.

P: A 63-nak a 3 osztója. $|P| = i$,
Q: A 63-nak a 13 osztója. $|Q| = h$.
Az összetett állítás logikai értéke: $|B| = |P \lor Q| = i$.

P: A 63-nak a 2 osztója. $|P| = h$,
Q: A 63-nak a 7 osztója. $|Q| = i$.
Az összetett állítás logikai értéke: $|C| = |P \lor Q| = i$.

P: A 63-nak a 2 osztója. $|P| = h$,
Q: A 63-nak a 5 osztója. $|Q| = h$.
Az összetett állítás logikai értéke: $|D| = |P \lor Q| = h$.

Diszjunkció $P \lor Q$ értéktáblázata

A 3. példában látottak alapján megadjuk a diszjunkció értéktáblázatát:

P	Q	$P \lor Q$
i	i	***i***
i	h	***i***
h	i	***i***
h	h	***h***

Vagyis a $P \lor Q$ állítás pontosan akkor igaz, ha a két összetevő közül legalább az egyik igaz. A $P \lor Q$ állítás akkor és csak akkor hamis, ha mindkét összetevő hamis.

Feladatok

1. K1 Igazoljuk értéktáblázattal, hogy a
a) konjunkció;
b) diszjunkció
kommutatív művelet!

2. K2 Igazoljuk értéktáblázattal a következő azonosságokat!
a) $\neg(A \lor B) = (\neg A) \land (\neg B)$;
b) $\neg(A \land B) = (\neg A) \lor (\neg B)$.
(A szakirodalom *de Morgan*-azonosságoknak nevezi ezeket az összefüggéseket.)

3. K2 Tagadjuk a következő állításokat!
A: Bodzaszörpöt iszom, vagy paprikás krumplit eszem.
B: Elmegyek a kutyával sétálni, és levágom a kertben a füvet.
C: Elkészítem a matematika házi feladatot, és nem kapcsolom be a számítógépet.
D: Nem veszek kenyeret, vagy veszek sajtot.

4. K1 A következő állítások közismert szólásoknak a tagadásai. Adjuk meg az eredeti állításokat!
$\neg A$: Van olyan dolog, ami nem jó, és mégis jó a vége.
$\neg B$: Nem fújja a szél, és mégis zörög a haraszt.

5. K2 A felsorolt állítások között vannak-e azonosak?
$A \wedge B$, $A \wedge (\neg B)$, $(\neg A) \wedge B$, $(\neg A) \wedge (\neg B)$, $A \vee B$, $A \vee (\neg B)$, $(\neg A) \vee B$, $(\neg A) \vee (\neg B)$.

6. K2 A felsorolt állítások között keressük meg az azonosakat!
$A \wedge B$, $A \wedge (\neg B)$, $(\neg A) \wedge B$, $(\neg A) \wedge (\neg B)$, $\neg(A \vee B)$, $\neg\big(A \vee (\neg B)\big)$, $\neg\big((\neg A) \vee B\big)$, $\neg\big((\neg A) \vee (\neg B)\big)$.

7. K2 A felsorolt állítások között keressük meg az azonosakat!
$\neg(A \wedge B)$, $\neg\big(A \wedge (\neg B)\big)$, $\neg\big((\neg A) \wedge B\big)$, $\neg\big((\neg A) \wedge (\neg B)\big)$, $A \vee B$, $A \vee (\neg B)$, $(\neg A) \vee B$, $(\neg A) \vee (\neg B)$.

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: 19–22.

3. Műveleti tulajdonságok

A következőkben az $\wedge$, $\vee$, $\neg$ műveletek néhány tulajdonságát gyűjtjük össze.

Közvetlenül a műveletek definíciójából megállapítható, hogy **a konjunkció és a diszjunkció kommutatív művelet**.
A bevezetett jelölésekkel ezt így írjuk: $A \wedge B = B \wedge A$, $A \vee B = B \vee A$.

Kettőnél több állítás konjunkcióját is értelmezhetjük.
Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ állítások konjunkciója: $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$.
Ennek logikai értéke akkor és csak akkor igaz, ha minden állításának igaz a logikai értéke.
Az értelmezésből következik, hogy **a konjunkció asszociatív művelet**.
Jelöléseinkkel: $(A_1 \wedge A_2) \wedge A_3 = A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3) = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$.

Kettőnél több állítás diszjunkcióját is értelmezhetjük.
Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ állítások diszjunkciója: $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$.
Ennek logikai értéke akkor és csak akkor igaz, ha az állítások közül legalább egynek igaz a logikai értéke.
Az értelmezésből következik, hogy **a diszjunkció asszociatív művelet**.
Jelöléseinkkel: $(A_1 \vee A_2) \vee A_3 = A_1 \vee (A_2 \vee A_3) = A_1 \vee A_2 \vee A_3$.

De Morgan-azonosságok

A negáció, a konjunkció és a diszjunkció közötti fontos azonosságok a **de Morgan-azonosságok**, amelyeknek igazolását logikai értéktáblázat segítségével az előző leckében feladatként már kitűztük:
$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$,
$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$.

A logika története során fontos szerepe volt a következő két, önmagában is érdekes logikai törvénynek. Ezeket példaként most igazoljuk is.

1. példa Igazoljuk, hogy $\left|(\neg A) \vee A\right| = i$!

Megoldás
Készítsük el a logikai értéktáblázatot!

A	$\neg A$	$(\neg A) \vee A$
i	h	$\boldsymbol{i}$
h	i	$\boldsymbol{i}$

Látható, hogy A logikai értékétől függetlenül $(\neg A) \vee A$ logikai értéke igaz. Ezzel igazoltuk az állítást.

A harmadik kizárásának elve

Ez a **harmadik kizárásának elve**.

2. példa Igazoljuk, hogy $|\neg A \wedge A| = h$!

Megoldás

Készítsük el a logikai értéktáblázatot!

A	$\neg A$	$\neg A \wedge A$
i	h	$\boldsymbol{h}$
h	i	$\boldsymbol{h}$

Látható, hogy A logikai értékétől függetlenül $(\neg A) \wedge A$ logikai értéke hamis. Ezzel igazoltuk az állítást.

Az ellentmondás-mentesség elve

Ez az **ellentmondásmentesség elve**.

Az eddigiekben az állításokat elvonatkoztattuk a kijelentő mondatok tartalmától, és csak a logikai értékük volt fontos a számunkra. A tapasztalataink alapján még tovább mehetünk, és az állítások helyett a **logikai értékükkel** is végezhetünk műveleteket.

Ezen műveletek definíciói:

Műveletek az állítások logikai értékével

$\neg i = h$; $\neg h = i$;

$i \wedge i = i$; $i \wedge h = h$; $h \wedge i = h$; $h \wedge h = h$;

$i \vee i = i$; $i \vee h = i$; $h \vee i = i$; $h \vee h = h$.

3. példa Legyen $|P| = p$ (ahol p lehetséges értéke i vagy h). Igazoljuk, hogy

a) $p \wedge h = h$;

b) $p \vee i = i$!

Megoldás

a) Mivel $i \wedge h = h$, valamint $h \wedge h = h$, így az állítás valóban teljesül.

b) Mivel $i \vee i = i$, valamint $h \vee i = i$, így ez az állítás is teljesül.

4. példa Vizsgáljuk meg az $A \vee (B \wedge C)$, valamint a $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ állításokat! Azonos minden esetben a logikai értékük?

Megoldás

Három állításból raktuk össze mindkét összetett állítást, így $2^3 = 8$ lehetőséget kell az értéktáblázatban megvizsgálnunk.

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
i	*i*	*i*	*i*	***i***	*i*	*i*	***i***
i	*i*	*h*	*h*	***i***	*i*	*i*	***i***
i	*h*	*i*	*h*	***i***	*i*	*i*	***i***
h	*i*	*i*	*i*	***i***	*i*	*i*	***i***
i	*h*	*h*	*h*	***i***	*i*	*i*	***i***
h	*i*	*h*	*h*	***h***	*i*	*h*	***h***
h	*h*	*i*	*h*	***h***	*h*	*i*	***h***
h	*h*	*h*	*h*	***h***	*h*	*h*	***h***

A táblázat ötödik és nyolcadik oszlopa mutatja, hogy azonos minden esetben a logikai értéke a két összetett állításnak.

Az előző példa alapján felírható a következő azonosság:
$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
Vagyis beláttuk, hogy **a diszjunkció disztributív a konjunkció felett**.
Igazolható a következő azonosság is:
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
Vagyis **a konjunkció disztributív a diszjunkció felett**.
Az azonosság igazolását feladatként tűztük ki.

Feladatok

1. K1 Igazoljuk a következő négy azonosságot!
a) $A \wedge A = A$;
b) $A \vee A = A$;
c) $A \wedge (A \vee B) = A$;
d) $A \vee (A \wedge B) = A$.

2. K1 Legyen $|P| = p$ (ahol p lehetséges értéke *i* vagy *h*). Igazoljuk, hogy
a) $p \wedge i = p$;
b) $p \vee h = p$.

3. K2 Igazoljuk, hogy a konjunkció disztributív a diszjunkció felett, azaz:
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$!

4. K2 A disztributív tulajdonságok felhasználásával mondjuk rövidebben a következő állításokat!
a) Holnapra elolvasom ezt a novellát és sakkozom Ágnessel, vagy holnapra elolvasom ezt a novellát és pingpongozom Ágnessel.
b) Elmegyek röplabdázni vagy készítek egy csésze teát, és elmegyek röplabdázni vagy készítek egy melegszendvicset.

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: 23–25.

4. Még két logikai művelet

Az előzőekben három fontos logikai műveletet elemeztünk. Ebben a leckében még két művelettel ismerkedünk meg. Tesszük ezt azért, mert matematikaórán, de a mindennapi életben is gyakran találkozunk ezekkel.

I. Következtetéseink során használjuk a következő mondatokat:

Ha *A*, akkor *B*

Ha egy négyszög átlói felezve metszik egymást, akkor az a négyszög paralelogramma.
Ha egy egész szám utolsó számjegye 0, akkor osztható 10-zel.
Ha egy állatnak hat lába van, akkor az rovar.
Ha 0 °C alá süllyed a hőmérséklet, akkor megfagy a víz.

Ezek mindegyike ***ha A, akkor B*** szerkezetű mondat. Két állítás ilyen összekapcsolása sokszor előfordul. Ez a kapcsolat az **implikáció**.

Implikáció

$A \to B$

Implikáció

Tetszőleges A, B állítások implikációján a ha A, akkor B állítást, vagy ennek valamilyen átfogalmazott alakját értjük.
Jele: $A \to B$ vagy $A \Rightarrow B$. (Kiolvasása: Ha A, akkor B. Vagy: A implikálja B-t.)

Az implikációt gyakran használjuk matematikai tételek megfogalmazásánál. Ezekben a helyzetekben az $A \to B$ implikációt így is olvashatjuk:
Az A elegendő feltétele B-nek, vagy az A-nak szükséges feltétele B.
Az A-t **előtag**nak, a B-t **utótag**nak (konklúziónak) nevezzük.
Ha az előtag igaz, akkor az implikáció logikai értéke az utótag logikai értékével egyezik meg.
Megállapodunk abban, hogy hamis előtag esetén az implikációt igaznak tekintjük. (A hamis előtag nem mond semmit az utótagra.)
Az implikációt a következő értéktáblázat definiálja:

A	B	$A \to B$
i	*i*	***i***
i	*h*	***h***
h	*i*	***i***
h	*h*	***i***

Az implikáció **nem kommutatív** művelet: $A \to B \neq B \to A$,
nem asszociatív művelet: $(A \to B) \to C \neq A \to (B \to C)$.
Ezek a bizonyítások értéktáblázattal elvégezhetők, mindkettőt feladatként kitűztük a lecke végén.

II. Már kilencedik osztályban is láttuk, hogy a *ha A, akkor B* **állítás megfordítása** a *ha B, akkor A* állítás lesz. (Az előtagot és az utótagot felcseréljük.)
Ha az eredeti állítás és az állítás megfordítása is igaz, akkor **megfordítható állítás**ról beszéltünk.
Nagyon oda kell figyelnünk, hiszen minden *ha A, akkor B* állítás megfordítása formailag megfogalmazható, de ettől mi még nem neveztük megfordítható állításnak. Meg kell vizsgálni a megfordítás logikai értékét!
A matematikában nagy figyelmet tulajdonítunk azoknak az állításoknak, amelyeknek a megfordítása is igaz.

Tanulmányaink során számtalan ilyennel találkoztunk, most példaként nézzük a Pitagorasz-tételt:

- Ha egy háromszög derékszögű, akkor a leghosszabb oldal négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetösszegével.

Ezt az állítást bizonyítottuk, vagyis az állítás logikai értéke igaz.

Az állítás megfordítását az előtag és az utótag cseréjével kapjuk:

- Ha egy háromszögben a leghosszabb oldal négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetösszegével, akkor a háromszög derékszögű.

Ezt az állítást is bizonyítottuk, vagyis ennek a logikai értéke is igaz.

Ezek alapján igaz a következő állítás is:

- Ha egy háromszög derékszögű, akkor a leghosszabb oldal négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetösszegével, és ha egy háromszögben a leghosszabb oldal négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetösszegével, akkor a háromszög derékszögű.

Ez a megfogalmazás nagyon hosszú! Ezt röviden így szoktuk megfogalmazni:

- Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha a leghosszabb oldal négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetösszegével.

Most már látjuk, hogy itt lényegében két implikációt konjunkcióval kapcsoltunk össze:
$(A \to B) \wedge (B \to A)$.
A rövid megfogalmazásban az *… akkor és csak akkor…* szófordulatot használjuk.
Ezt egyetlen logikai műveletnek, **ekvivalenciának** nevezzük.

Ekvivalencia

Tetszőleges A, B állítások ekvivalenciáján az A-val és a B-vel képezhető két implikáció konjunkcióval való összekapcsolását értjük, ami röviden az A akkor és csak akkor, ha B állítás lesz.
Jele: $A \leftrightarrow B$ vagy $A \Leftrightarrow B$. (Kiolvasása: A akkor és csak akkor, ha B.)

Ekvivalencia

$A \leftrightarrow B$

Az ekvivalenciát is gyakran használjuk a matematikai tételek megfogalmazásánál. Ekkor az $A \leftrightarrow B$ ekvivalenciát így is olvashatjuk: *Az A szükséges és elegendő feltétele B-nek* vagy a *B szükséges és elégséges feltétele A-nak.*
Az ekvivalencia értelmezése alapján az értéktáblázata a következő módon alakul:

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$
i	*i*	*i*	*i*	***i***
i	*h*	*h*	*i*	***h***
h	*i*	*i*	*h*	***h***
h	*h*	*i*	*i*	***i***

Vagyis az ekvivalencia értéktáblázata:

Az ekvivalencia értéktáblázata

A	B	$A \leftrightarrow B$
i	*i*	***i***
i	*h*	***h***
h	*i*	***h***
h	*h*	***i***

Az ekvivalencia kommutatív és asszociatív művelet. Értéktáblázattal ezeket könnyen igazolhatjuk.

Feladatok

1. K2 Igazoljuk, hogy az implikáció
a) nem kommutatív;
b) nem asszociatív művelet!

2. K2 Igazoljuk a következő azonosságokat!
a) $A \to B = (\neg A) \vee B$;
b) $A \to B = \neg\big(A \wedge (\neg B)\big)$.

3. K2 Mutassuk meg, hogy tetszőleges A és B állítás esetén $A \to B$ és $(\neg B) \to (\neg A)$ logikai értéke egyenlő!

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: 25–33.

4. K2 Három ember egy-egy állítását olvashatjuk a következőkben. Van-e közöttük egyező kijelentés?
András: Nem esik az eső, és ernyővel megyek.
Botond: Ha esik az eső, akkor ernyővel megyek.
Csaba: Nem esik az eső, vagy ernyővel megyek.

5. Alkalmazások

Az előzőekben megismerkedtünk a leggyakrabban használt logikai műveletekkel. Ezek segítségével megadható az összetett állítások szerkezete, így ezeknek az állításoknak a logikai értéke is könnyebben meghatározhatóvá válik.

1. példa Adjuk meg a következő állítás szerkezetét!
Ha egy természetes szám számjegyeinek összege osztható 9-cel, és az utolsó számjegye osztható 5-tel, akkor a szám osztható 45-tel.

Megoldás
Vezessük be a következő jelöléseket:
A: Egy természetes szám számjegyeinek összege osztható 9-cel.
B: Egy természetes szám utolsó számjegye osztható 5-tel.
C: Egy természetes szám osztható 45-tel.
Ezekkel a jelölésekkel az összetett állítás szerkezete: $(A \wedge B) \to C$.

2. példa A következő állítást bontsuk fel egyszerű kijelentésekre, majd logikai műveletekkel írjuk fel az összetett kijelentést!
Ha délután tanulok és nem számítógépezek, akkor holnapra elkészítem a házi feladatomat, és olvasok vagy elmegyek futni.

Megoldás
A fenti összetett állítás egyszerű kijelentései (állításai) a következők:
A: Délután tanulok.
B: Délután számítógépezek.
C: Holnapra elkészítem a házi feladatomat.
D: Olvasok.
E: Elmegyek futni.

A *ha* … , *akkor* … azt mutatja, hogy ez az állítás implikáció. Az előtagja az *és* miatt konjunkció. Az utótagja is konjunkció, amelynek a második része diszjunkció a *vagy* miatt.
Vagyis az állítás szerkezete: $(A \wedge (\neg B)) \to [C \wedge (D \vee E)]$.

3. példa Ágnes ezt mondja édesapjának: Ha bepakolom a táskába holnapra az iskolai cuccot, vagy meglocsolom a szobámban a virágokat, akkor nem kapcsolom be a számítógépet és nem megyek el Csokival sétálni.
Mi Ágnes kijelentésének logikai értéke, ha nem pakolta be a táskájába holnapra az iskolai cuccot, de meglocsolta a szobájában a virágokat, nem kapcsolta be a számítógépet és nem ment el Csokival sétálni?

Megoldás
Ágnes összetett állítása négy egyszerű állításból áll:
A: Bepakolja a táskába holnapra az iskolai cuccot.
B: Meglocsolja a szobában a virágokat.
C: Bekapcsolja a számítógépet.
D: Elmegy Csokival sétálni.
Az állítása egy implikáció, melynek előtagja diszjunkció, utótagja konjunkció. Ágnes kijelentésének szerkezete: $(A \vee B) \to ((\neg C) \wedge (\neg D))$.
Tudjuk, hogy $|A| = h$, $|B| = i$. Vagyis $|A \vee B| = i$.
Tudjuk továbbá, hogy $|\neg C| = i$, $|\neg D| = i$. Vagyis $|(\neg C) \wedge (\neg D)| = i$.
Mivel az előtag és az utótag logikai értéke is igaz, ezért az implikáció logikai értéke is igaz.
Azt is mondhatjuk, hogy Ágnes kijelentésével megegyező volt, ami ténylegesen történt.

4. példa Oldjuk meg a következő egyenletet: $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$!
Megoldás közben a magyarázó szöveg helyett használjuk a logikai műveletek jeleit!

Megoldás

$$\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{(3x-1)^2} = \sqrt{(x+3)^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$|3x-1| = |x+3|$$
$$\Updownarrow$$
$$\overbrace{3x - 1 = x + 3 \vee 3x - 1 = -x - 3}$$
$$x = 2 \vee x = -0{,}5$$

Vagyis az egyenlet gyökei: $x = 2 \vee x = -0{,}5$. Az ekvivalens átalakítások miatt hamis gyököt nem kaphattunk, gyököt nem veszthettünk.

5. példa Oldjuk meg a következő egyenletet: $\sqrt{x+5}=x-1$!
Megoldás közben a magyarázó szöveg helyett most is használjuk a logikai műveletek jeleit!

Megoldás

$$\sqrt{x+5}=x-1$$
$$\Downarrow$$
$$x+5=x^2-2x+1$$
$$\Updownarrow$$
$$0=x^2-3x-4$$
$$\Updownarrow$$
$$0=(x-4)(x+1)$$
$$\Updownarrow$$
$$\overbrace{x=4 \vee x=-1}$$

Az első átalakításunk implikáció volt. Vagyis az új egyenlet gyökein kívül az eredeti egyenletnek nem lehet több gyöke, de nem biztos, hogy az új egyenlet gyökei az eredeti egyenletnek is gyökei. Ilyen esetben nagyon fontos, hogy a gyököket ellenőrizzük!
Az $x=-1$ nem gyöke az egyenletnek. (Bal oldal: $\sqrt{-1+5}=2$, jobb oldal: $-1-1=-2$.)
Az egyenlet egyedüli megoldása: $x=4$.

Neumann János (Budapest, 1903–Washington, 1957) magyar származású matematikus

Megismerkedtünk a matematikai logika legfontosabb fogalmaival. Az eddig látottakat azonban csak bevezetőként kezelhetjük.
Érdekességként említjük, hogy kapcsolat teremthető a matematikai logika és az áramkörök között. Az így kapott logikai áramkörökre épülnek az automatikus berendezések és az elektronikus számítógépek is. Ezek gyakorlati jelentősége óriási. Látható, hogy matematikai logika nélkül nem építhetők meg a ma működő számítógépek sem. A bevezetőben már említettük, hogy ebben kiemelkedő szerepe volt Neumann Jánosnak.

EDSAC-ot (Electronic Delay Storage Automatic Calculator), mely az első tárolt programú számítógép volt a világon. Neumann János elvi alapvetése után készítették el a cambridge-i egyetem matematikai laboratóriumában, az első programot 1949. május 6-án futtatták le rajta

Feladatok

1. K1 Adjuk meg a következő állítások szerkezetét a megismert műveletek segítségével!

a) Ha egy másodfokú egyenlet diszkriminánsa nem nulla, akkor az egyenletnek vagy nincs valós gyöke, vagy két különböző valós gyöke van.

b) Egy tört értéke akkor és csak akkor pozitív, ha a nevezője és a számlálója is pozitív vagy a nevezője és a számlálója is negatív.

2. K2 Péter a szombati programjáról a következő kijelentést tette:
Ha süt a nap és nem fúj a szél, akkor elmegyek teniszezni, vagy focizni.
Adjuk meg Péter kijelentésének logikai értékét, ha szombaton:

a) A nap sütött, a szél nem fújt, Péter elment teniszezni is és focizni is.

b) A nap sütött, a szél nem fújt, Péter elment teniszezni, de focizni nem.

c) A nap nem sütött, a szél nem fújt, Péter elment teniszezni is és focizni is.

d) A nap nem sütött, a szél fújt, Péter teniszezni nem, de focizni elment.

3. K2 Állapítsuk meg a következő állítások logikai értékét! (Az állításokban szereplő mindegyik kifejezés értelmezett.)

a) $x = y \leftrightarrow x^2 = y^2$;

b) $x = y \leftrightarrow x^3 = y^3$;

c) $x = y \leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y}$;

d) $x = y \leftrightarrow \sin x = \sin y$;

e) $x = y \leftrightarrow \lg x = \lg y$;

f) $x = y \leftrightarrow 2^x = 2^y$.

4. K2 Helyes-e az alábbi következtetés?
Ha szombaton kirándulni megyek, akkor nem tudok tanulni. Szombaton tanultam. Vagyis nem voltam kirándulni.

5. K2 Nézzük a következő két állítást:
A: Ha egy sokszög belső szögeinek összege 540°, akkor oldalainak száma öt.
B: Ha egy sokszög oldalainak száma öt, akkor belső szögeinek összege 540°.
Az alábbi kijelentések közül melyik igaz, melyik hamis?

a) Mindkét állítás igaz.

b) Az első állítás a második tagadása.

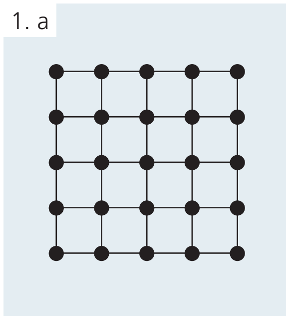
c) A második állítás az első tagadása.

d) Az első állítás a második megfordítása.

e) A második állítás az első megfordítása.

6. K2 Az *1. a ábrán* látható 4-szer 4-es rácsot tekintsük úgy, mintha egy 25 pontú egyszerű gráf lenne. Még hány darab élt kellene berajzolni, hogy a gráf teljes legyen?

1. a



7. K2 Írjuk fel a következő összetett kijelentések logikai szerkezetét a megismert műveletek segítségével:

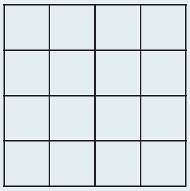
a) Egy négyszög akkor és csak akkor rombusz, ha minden oldala egyenlő hosszúságú.

b) Az $(x+4)(x-1)<0$ akkor és csak akkor teljesül, ha vagy $x+4>0$ és $x-1<0$, vagy $x+4<0$ és $x-1>0$.

c) Ha egy négyszögben két szemközti szög összege 180°, akkor az húrnégyszög.

d) Ha egy szám páros, és a számjegyeinek összege osztható hárommal, akkor a szám osztható hattal.

1. b



8. E1 Az *1. b ábrán* látható 4-szer 4-es rács négyzetekből áll. Rakjuk össze a rácsot
a) tíz darab négy;
b) nyolc darab öt;
c) öt darab nyolc;
d) négy darab tíz
hosszúságú vasrúdból! A rudakat hajlítani, és az összeillesztéseknél rögzíteni lehet, de elvágni nem szabad!

9. K2 Egy sakkverseny döntőjében négyen voltak. A verseny után mindegyik szereplőt megkérdezték, melyik helyen végzett.
Anna: Nem lettem sem első, sem utolsó.
Béla: Nem lettem első.
Csilla: Első lettem.
Dóra: Én lettem az utolsó.
Tudjuk, hogy a négy válasz közül három igaz, egy hamis. Ki hazudott? Ki nyerte a versenyt?

10. K2 András, Botond és Csaba beszélgetnek.
András szerint Botond hazudik.
Botond szerint Csaba hazudik.
Csaba szerint András és Botond hazudik.
Ki mond igazat és ki hazudik?

11. K2 Valaki elhatározta, hogy hétfőn, szerdán és pénteken mindig igazat fog mondani, a többi napon mindig hazudni fog. Egyszer egy napon azt mondta, hogy „Holnap igazat fogok mondani”. Melyik napon történt ez?

12. K2 A matematikai szertár egyik fiókjában a következő hat test található: piros kocka, zöld kocka, piros henger, zöld henger, piros gömb és zöld gömb. Melyik két testet kell kivennünk, ha igazzá akarjuk tenni a következő állítást:
a) Minden henger piros.
b) Amelyik piros, az henger.
c) Amelyik kocka vagy gömb, az zöld.
d) Amelyik zöld, az kocka vagy gömb.
e) Amelyik zöld, az kocka.

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: 37–40.

II. Számsorozatok

A gyakorlati életben sokszor találkozunk olyan kérdésekkel, amelyek megválaszolásához valós számok egymás utáni leírására van szükségünk, vagyis e számokat sorozatba rendezzük. Ilyen probléma például bizonyos biológiai populációk növekedési (vagy fogyási) ütemének vizsgálata, de akkor is ezzel a kérdéssel találkozunk, amikor a bankban elhelyezett pénzünk értékét akarjuk kiszámítani pl. 5 év múlva egy adott kamat mellett. A számsorozatokkal már az ókori matematikában is találkozunk. Vizsgálták az ún. háromszögszámokat, négyzetszámokat, stb. Ezek a vizsgálatok is számok sorozatba rendezését kívánták. Később, a matematika fejlődése során, ahogy közelebb jutott az ember a „végtelenül nagy”, illetve a „végtelenül kicsi” fogalmakhoz, a számsorozatok vizsgálatával egyre mélyebbre hatolt a matematika tudományában, s így egyre nagyobb jelentőségű felfedezésekre tehetett szert.
Ebben a fejezetben mi is a számsorozatokkal foglalkozunk. Először megismerkedünk az alapfogalmakkal, majd néhány speciális és fontos számsorozattal, és ezek tulajdonságaival.

1. Számsorozat fogalma, megadási módja

1. példa Írjuk fel növekvő sorrendben a pozitív négyzetszámok sorozatának első 12 tagját! Adjuk meg a sorozat ***n***-edik tagját!

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144.
A sorozat ***n***-edik tagja: n^2.

2. példa Írjuk fel a szomszédos pozitív egész számok számtani közepének sorozatából az első 10 tagot! Adjuk meg a sorozat ***n***-edik tagját!

$\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}, \frac{15}{2}, \frac{17}{2}, \frac{19}{2}, \frac{21}{2}.$

A sorozat n-edik tagja: $\frac{n+(n+1)}{2} = \frac{2n+1}{2}$.

E két egyszerű példával jól szemléltethető a számsorozat fogalma. Mindkét példában a pozitív egész számokhoz rendeltünk valamilyen utasítás szerint valós számokat, s e hozzárendelés mindkét esetben egyértelmű volt. E gondolat mentén megalkothatjuk a számsorozat fogalmát.

Számsorozat

Számsorozat

A **számsorozat** olyan függvény, melynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza (vagy annak valamely végtelen részhalmaza), értékkészlete pedig a valós számoknak valamely részhalmaza.

A számsorozat tehát az 1-hez rendeli a sorozat első tagját, a 2-höz a sorozat második tagját és így tovább; n-hez rendeli a sorozat n-edik tagját. A sorozat első, második és általában az n-edik tagját szokás a_1-gyel, a_2-vel, a_n-nel jelölni.

Megjegyzés. Felvetődik a kérdés, mire utal a definicióban az a zárójeles megjegyzés *„vagy annak valamely végtelen részhalmaza”*. Tekintsük a következő számsorozatot: $a_n = \frac{1}{n-2}$. A sorozat első tagja $a_1 = -1$. Mivel a tört nevezője nem lehet 0, így $n = 2$-re nem értelmezhető ez a sorozat. Tehát a sorozatnak nincs második tagja. Így értelmezési tartománya nem a pozitív egész számok halmaza, hanem annak egy végtelen részhalmaza.

A SZÁMSOROZAT MEGADÁSA

Egy számsorozatot többféle módon is megadhatunk. Az egyik lehetséges megadási mód, ha a sorozatot az általános tagjával, vagyis a sorozatot meghatározó függvény hozzárendelési utasításával adjuk meg. Nézzünk erre néhány példát.

3. példa Írjuk ki az alábbi számsorozatok első 6 tagját!

a) $a_n = \frac{n^2+1}{n+1}$, *b)* $a_n = \frac{2^n}{n^2}$, *c)* $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, *d)* $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

Megoldás

a) $a_1 = \frac{2}{2} = 1$, $a_2 = \frac{5}{3}$, $a_3 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$, $a_4 = \frac{17}{5}$, $a_5 = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$, $a_6 = \frac{37}{7}$.

b) $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{8}{9}$, $a_4 = 1$, $a_5 = \frac{32}{25}$, $a_6 = \frac{64}{36} = \frac{16}{9}$.

c) $a_1 = -1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = -\frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, $a_5 = -\frac{1}{5}$, $a_6 = \frac{1}{6}$.

d) $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$, $a_4 = 0$, $a_5 = 1$, $a_6 = 0$.

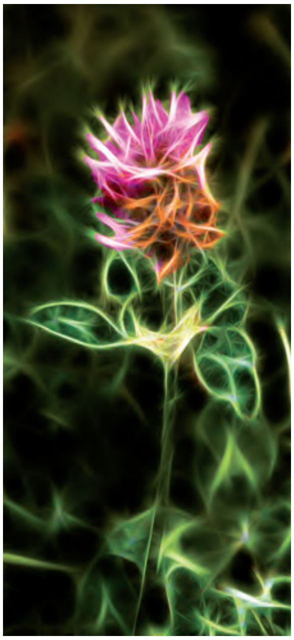
Úgy is megadhatunk egy számsorozatot, hogy megadjuk annak első néhány tagját, majd megadunk egy olyan utasítást, mely megmondja, hogy a sorozat tagjait hogyan képezhetjük a kérdéses tagot megelőző néhány tag segítségével. Az ilyen módon megadott számsorozatot **rekurzív sorozatnak** nevezzük. Nézzünk erre is egy példát.

Rekurzív sorozat

4. példa Legyen a számsorozat első és második tagja: $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ és a további tagokra $(n > 2)$ $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$. Írjuk fel a sorozat első néhány tagját!

Megoldás

2, 1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, …



Az első rekurzív sorozat megalkotása *Fibonacci* más néven *Leonardo Pisano (1170–1250),* olasz kereskedő nevéhez fűződik. Ő egy nyúlpopuláció növekedését vizsgálva fedezte fel az alábbi rekurzív sorozatot:

$f_1 = f_2 = 1$ és $(n > 2)$ esetén $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

A sorozat első 12 tagja: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

Valószínűleg nem is sejtette Fibonacci, hogy e sorozat felfedezése milyen nagy jelentőségű a matematikában. Egyrészt, mert e számsorozatnak rendkívül sok érdekes tulajdonsága van, másrészt, mert az azóta eltelt évszázadokban kiderült, hogy a sorozat számai nagyon gyakran fordulnak elő a természetben. A sorozat sok érdekes tulajdonsága között különösen azok meglepőek, melyekből kiderül, milyen sokféleképpen tudja e számsorozat önmagát reprodukálni. Csak 2 példát mutatunk a sorozat meglepő tulajdonságai közül.

Fibonacci-sorozat

1. Ha a sorozat első néhány tagjának összegéhez 1-et hozzáadunk, ismét a sorozat egy tagjához jutunk:

$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n + 1 = f_{n+2}$.

2. Ha a sorozat szomszédos tagjainak négyzetét összeadjuk, újra a sorozat egy tagjához jutunk:

$f_1^2 + f_2^2 = 2 = f_3$, $f_2^2 + f_3^2 = 5 = f_5$ és általában $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$

E nevezetes sorozatot felfedezőjéről Fibonacci-sorozatnak nevezzük, a sorozat számait pedig Fibonacci-számoknak.

Korábbi tanulmányainkban már megvizsgáltuk az első ***n* pozitív egész szám összegét**:

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Most próbáljuk meghatározni az első ***n* pozitív egész szám négyzetének összegét**. Vajon mivel egyenlő

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2$?

Az összeg meghatározásához vegyük elő az alábbi jól ismert azonosságot:

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Alkalmazzuk ezt az azonosságot az $(1-1)^3$, $(2-1)^3$, $(3-1)^3$, …, $(n-1)^3$ kifejezésekre:

$$
\begin{aligned}
0 &= (1-1)^3 = 1^3 - 3\cdot 1^2\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1^2 - 1^3,\\
1^3 &= (2-1)^3 = 2^3 - 3\cdot 2^2\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 1^2 - 1^3,\\
2^3 &= (3-1)^3 = 3^3 - 3\cdot 3^2\cdot 1 + 3\cdot 3\cdot 1^2 - 1^3,\\
3^3 &= (4-1)^3 = 4^3 - 3\cdot 4^2\cdot 1 + 3\cdot 4\cdot 1^2 - 1^3,\\
&\vdots\\
(n-1)^3 &= \ldots \qquad = n^3 - 3\cdot n^2\cdot 1 + 3\cdot n\cdot 1^2 - 1^3.
\end{aligned}
$$

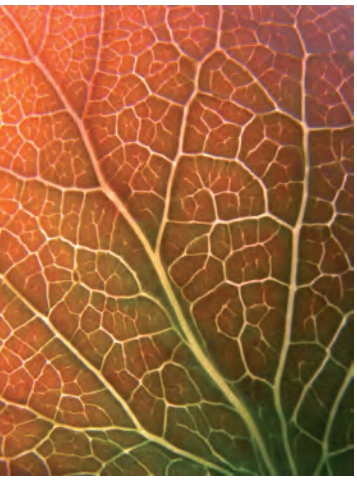
Adjuk össze ezt az n db egyenlőséget oszloposan! A bal oldalon a 0-tól $(n-1)$-ig terjedő számok köbei szerepelnek, míg a jobb oldali első oszlopban az 1-től n-ig terjedő számok köbei vannak. Így mindkét oldalból elvéve a bal oldali köbszámokat azt kapjuk, hogy
$0 = n^3 - 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n) - n$.
Jelöljük az első n négyzetszám keresett összegét S_n-sel:
$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2$.
Ezzel a következő egyenlőséghez jutunk:

$$0 = n^3 - 3S_n + 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n, \qquad \text{azaz} \qquad 3S_n = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n,$$

$$3S_n = \frac{2n^3 + 3n(n+1) - 2n}{2},$$

$$3S_n = \frac{n[2n^2 - 2 + 3(n+1)]}{2} = \frac{n[2(n+1)(n-1) + 3(n+1)]}{2},$$

$$3S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$



Innen kapjuk az első n pozitív egész szám négyzetének összegét:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

5. példa Írjuk fel a 7-tel való osztáskor 2 maradékot adó pozitív egész számok sorozatának első 6 tagját! Adjuk meg a számsorozat általános tagját, és számítsuk ki: hány db kétjegyű tagja van ennek a számsorozatnak!

Megoldás

A számsorozat első 6 tagja: 2, 9, 16, 23, 30, 37. A sorozat általános tagja: $a_n = 7(n-1) + 2$.
Ha a sorozat n-edik tagja kétjegyű, akkor
$7(n-1) + 2 < 100$, azaz $n < 15$.
Tehát a sorozatnak 14 db 100-nál kisebb tagja van. Mivel a sorozat első és második tagja egyjegyű, így a sorozat kétjegyű tagjainak a száma $14 - 2 = 12$.

Feladatok

1. K1 Adjuk meg a sorozat további három tagját és az általános tagját!

a) 1, 3, 5, 7, 9, …;

b) 2, 4, 8, 16, 32, …;

c) $1,\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{7},\ \frac{5}{9}, \ldots$.

2. K1 Írjuk fel a megadott számsorozat első 6 tagját!

a) $a_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 2}$; *b)* $a_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n}$; *c)* $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$.

3. K2 Adott az $a_1 = 2$ és $n > 1$ esetén $a_n = a_{n-1} + 4$ rekurzív sorozat.

a) Adjuk meg a sorozat 100. tagját!

b) Hány db kétjegyű tagja van a sorozatnak?

c) Milyen n-re teljesül, hogy a sorozat n-edik tagja osztható 5-tel?

4. K2 Igazoljuk, hogy a Fibonacci-sorozatnak minden harmadik tagja páros!

5. K2 Írjuk fel a Fibonacci-sorozat tagjainak 3-mal való osztási maradékát! Mit vehetünk észre?

6. E1 A természetes számokat „csomagokba" raktuk az alábbi módon:

1. csomag: (1)
2. csomag: (2, 3)
3. csomag: (4, 5, 6),
4. csomag: (7, 8, 9, 10)

stb.

Hányadik csomagban szerepel a 2011 szám?

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 858., 859., 860., 861., 863., 867., 871.

2. Teljes indukcó

Ebben a leckében egy újfajta bizonyítási eljárást, módszert fogunk megismerni. A bizonyítási módszer neve *teljes indukciós bizonyítás.* Látni fogjuk, hogy – sok egyéb mellett – a számsorozatok vizsgálatánál, az egyes sorozatok tulajdonságainak bizonyításánál is nagy hasznunkra lesz ez a módszer. A könnyebb megértés kedvéért az eljárást először egy konkrét példán keresztül érdemes megvizsgálni.

1. példa Az előző leckében egy kicsit hosszadalmas elemi algebrai úton megmutattuk, hogy az első n db pozitív egész szám négyzetének összege

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Igazoljuk ezt az összefüggést más módszerrel!

Megoldás

Először ellenőrizzük a képlet helyességét néhány kezdő számra:

$n = 1$ esetén $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot (2+1)}{6} = 1$, vagyis a képlet igaz $n = 1$-re.

$n = 2$ esetén $1^2 + 2^2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot (4+1)}{6} = 5$, tehát a képlet igaz $n = 2$-re is.

$n = 3$ esetén $1^2 + 2^2 + 3^2 = \frac{3 \cdot 4 \cdot (6+1)}{6} = 14$, tehát a képlet igaz $n = 3$-ra is.

Most legyen k egy olyan pozitív egész szám, melyre igaz az állítás (ilyen szám biztosan van, hiszen az 1, 2, 3 is ilyen egész szám), és próbáljuk megmutatni azt, hogy ha k-ra igaz a képlet, akkor a rá következő számra $(k+1)$-re is igaz lesz.

Ha k-ra igaz a képlet, akkor

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Most igazoljuk, hogy az állítás $(k+1)$-re is igaz :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

A bal oldali első k tag helyére beírhatjuk a $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ kifejezést, így azt kell igazolnunk, hogy

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $(k+1)$-gyel, és szorozzuk meg 6-tal!

$k(2k+1) + 6(k+1) = (k+2)(2k+3)$,

$2k^2 + 7k + 6 = 2k^2 + 7k + 6$.

Azonossághoz jutottunk. Ezek szerint az állítás valóban k-ról $(k+1)$-re „öröklődik", így minden pozitív egész számra igaz.

A most bemutatott módszer lényegét a következőkben foglalhatjuk össze:

Teljes indukció

Teljes indukciós bizonyítási módszer

A természetes számokkal kapcsolatos állítás bizonyításakor

1. először ellenőrizzük az állítást néhány természetes számra (célszerű $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$-re ellenőrizni az állítást).
2. Legyen k egy olyan természetes szám, melyre igaz az állítás (ilyen k szám létezik, hiszen az első lépésben éppen ezt ellenőriztük).
3. Megmutatjuk hogy az állítás „öröklődik”, vagyis, ha valamely k-ra igaz, akkor a rákövetkező természetes számra, $(k + 1)$-re is igaz lesz.
4. Mivel az első lépésben ellenőriztük, hogy van olyan természetes szám, amelyre igaz az állítás, és a harmadik lépésben igazoltuk, hogy ha valamely számra igaz, akkor a rákövetkezőre is igaz, így az eredeti állítás minden természetes számra igaz.

2. példa Legyen f_n a Fibonacci-sorozat n-edik tagja. Igazoljuk, hogy a sorozat első n tagjának négyzetösszege egyenlő az n-edik és az $(n + 1)$-edik tag szorzatával, vagyis
$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \ldots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$!

Megoldás

A bizonyítást végezzük teljes indukcióval!

$n = 1$-re $\quad f_1^2 = 1 \quad$ és $\quad f_1 \cdot f_2 = 1 \cdot 1 = 1$, $\quad$ tehát igaz az állítás.

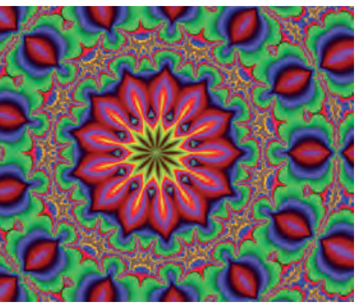
$n = 2$-re $\quad f_1^2 + f_2^2 = 1 + 1 = 2 \quad$ és $\quad f_2 \cdot f_3 = 1 \cdot 2 = 2$, $\quad$ tehát igaz az állítás.

Legyen k olyan természetes szám, melyre igaz az állítás (tudjuk, hogy van ilyen), vagyis az

$f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_k^2 = f_k \cdot f_{k+1}$,

és mutassuk meg, hogy az állítás $(k + 1)$-re is igaz lesz, azaz

$f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_k^2 + f_{k+1}^2 = f_{k+1} \cdot f_{k+2}$!



A bal oldal első k db tagjának helyébe írhatjuk az $f_k \cdot f_{k+1}$ mennyiséget, így azt kell igazolnunk, hogy

$f_k \cdot f_{k+1} + f_{k+1}^2 = f_{k+1} \cdot f_{k+2}$.

Osszuk el a kapott egyenlet mindkét oldalát f_{k+1}-gyel:

$f_k + f_{k+1} = f_{k+2}$!

Ez az egyenlőség pedig nyilván igaz, hiszen éppen azt fejezi ki, hogy a $(k + 2)$-dik tag egyenlő az előző két tag összegével, vagyis ez éppen a Fibonacci-sorozat definíciója.

A teljes indukciós bizonyítási módszer – sok egyebek mellett – oszthatósági feladatok megoldásakor is jól alkalmazható.

3. példa Igazoljuk, hogy ha n természetes szám, akkor $2^{4n+1} + 3$ osztható 5-tel!

Megoldás

$n = 0$-ra $\quad 2 + 3 = 5$, $\quad$ tehát igaz az állítás.

$n = 1$-re $\quad 2^5 + 3 = 35$, $\quad$ tehát igaz az állítás.

Legyen k egy olyan természetes szám, melyre igaz az állítás:

$5 \mid 2^{4k+1} + 3$,

és igazoljuk, hogy ekkor $(k + 1)$-re is igaz lesz az álltás:

$5 \mid 2^{4(k+1)+1} + 3$!

Alakítsuk át a kapott kifejezést felhasználva a hatványozás megfelelő azonosságait:

$2^{4(k+1)+1} + 3 = 2^{4k+1+4} + 3 = 2^4 \cdot 2^{4k+1} + 3 = 16 \cdot 2^{4k+1} + 3 = 2^{4k+1} + 3 + 15 \cdot 2^{4k+1}$!

A kapott kifejezés első két tagjának összege az indukciós feltevésünk miatt osztható 5-tel, a harmadik tag pedig 15-nek többszörös, így ez a tag is osztható 5-tel. Ezzel beláttuk, hogy valóban minden n természetes számra $2^{4n+1} + 3$ osztható 5-tel.

Feladatok

1. E1 Igazoljuk, hogy az első n db pozitív egész szám köbének összege:
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$!

2. E1 Igazoljuk az alábbi egyenlőséget:
$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$!

3. E1 Igazoljuk az alábbi egyenlőséget:
$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$!

4. E1 Legyen f_n a Fibonacci-sorozat n-edik tagja. Igazoljuk, hogy ha n osztható 6-tal, akkor $4 \mid f_n$!

5. E1 Igazoljuk, hogy ha n természetes szám, akkor $(7\cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+4})$ osztható 17-tel!

6. E2 Igazoljuk, hogy ha n természetes szám, akkor $3^{2n+1} + 40n - 3$ osztható 64-gyel!

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1002., 1003., 1004., 1007.

3. A számtani sorozat

Egy gyakran használt speciális számsorozatot elevenítünk fel a mostani leckében. E sorozatok fő jellemzője, hogy két egyszerű adat segítségével könnyen eljuthatunk a sorozat bármely tagjához.
Vizsgáljuk meg a következő számsorozatokat. Fogalmazzuk meg, milyen közös tulajdonságuk van ezeknek a sorozatoknak!

a) 3, 7, 11, 15, 19, 23, …
b) –2, 5, 12, 19, 26, 33, …
c) 15, 11, 7, 3, –1, –5, …
d) $\frac{3}{2}$, 2 $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$, 4, …

Hamar észrevehetjük a sorozatok közös tulajdonságát: minden sorozathoz tartozik egy a sorozatra jellemző valós szám, melyet a sorozat bármelyik tagjához hozzáadva megkapjuk a sorozat következő tagját. Ha tehát a sorozat első tagja a_1, és d-vel jelöljük a sorozatra jellemző számot, akkor bármely $n > 1$ esetén
$a_n = a_{n-1} + d$.
E sorozatok mindegyike tehát egy **rekurzív sorozat**.
A fenti példánkban
a) esetben $a_1 = 3$, $d = 4$;
b) esetben $a_1 = -2$, $d = 7$;
c) esetben $a_1 = 15$, $d = -4$;
d) esetben $a_1 = \frac{3}{2}$, $d = \frac{1}{2}$.

Az ilyen tulajdonsággal rendelkező számsorozatot **számtani sorozatnak** nevezzük.

Számtani sorozat

Számtani sorozat

A számtani sorozat olyan számsorozat, melyben bármely két szomszédos tag különbsége (differenciája) a sorozatra jellemző állandó. A differencia a nagyobb sorszámú tag és az ezt megelőző tag különbsége.

Ha a sorozat első tagja a_1, a differenciája d, akkor
$a_2 = a_1 + d$,
$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$,
$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$,
stb.

A felsorolásból látható, hogy a sorozat n-edik tagját megkapjuk, ha az első taghoz hozzáadjuk a sorozat differenciájának $(n-1)$-szeresét:
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

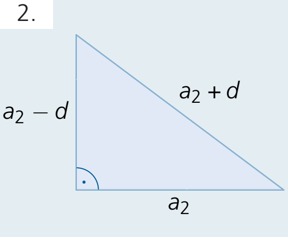
1. példa Egy számtani sorozat harmadik tagja 13, tizedik tagja 41. Számítsuk ki a sorozat huszadik tagját!

Megoldás
Fejezzük ki a sorozat harmadik és tizedik tagját az első tag és a differencia segítségével!
$a_3 = a_1 + 2d = 13$,
$a_{10} = a_1 + 9d = 41$.
Egy kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszert kaptunk. Az első egyenletből:
$a_1 = 13 - 2d$.
Ezt a második egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy
$13 - 2d + 9d = 41$, azaz $7d = 28$, ahonnan $d = 4$.
Ezzel pedig:
$a_1 = 13 - 2d = 13 - 8 = 5$.
Ismerve most már a sorozat első tagját és differenciáját, a sorozat huszadik tagja:
$a_{20} = a_1 + 19d = 5 + 19 \cdot 4 = 81$.

2. példa Melyik az a számtani sorozat, melyre
$3a_3 + a_5 = 22$ és $a_7 - 2a_2 = 15$?

Megoldás
Írjuk ki az egyenletekben szereplő tagokat a sorozat első tagja és differenciája segítségével!
$3(a_1 + 2d) + a_1 + 4d = 22$ és $a_1 + 6d - 2(a_1 + d) = 14$, azaz
$4a_1 + 10d = 22$ és $-a_1 + 4d = 14$.
A második egyenletből $a_1 = 4d - 14$; ezzel az első egyenlet:
$16d - 56 + 10d = 22$, vagyis $26d = 78$, ahonnan $d = 3$.
A keresett számtani sorozat differenciája 3, első tagja pedig $a_1 = 4d - 14 = -2$.

3. példa Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Mekkora a háromszög területe, ha a kerülete 120 cm?

2.


Megoldás
Ha a vizsgált probléma egy számtani sorozat három szomszédos tagját szerepelteti, akkor érdemes a sorozat második tagjára bevezetni egy ismeretlent, hiszen az első tag ugyanannyival kisebb a második tagnál, mint amennyivel a harmadik tag nagyobb nála. Legyen tehát a nagyobbik befogó a_2. Ekkor a kisebbik befogó $a_2 - d$, az átfogó pedig $a_2 + d$. Ezek után írjuk fel a Pitagorasz-tételt a háromszögre! *(2. ábra)*
$(a_2 - d)^2 + a_2^2 = (a_2 + d)^2$.

Végezzük el a kijelölt műveleteket és vonjunk össze:
$a_2^2 - 2a_2d + d^2 + a_2^2 = a_2^2 + 2a_2d + d^2$,
$a_2^2 = 4a_2d$, ahonnan $a_2 \neq 0$ miatt $a_2 = 4d$.
Ezek szerint a háromszög oldalai: $3d$, $4d$, $5d$.
A háromszög kerülete: $3d + 4d + 5d = 12d = 120$, tehát $d = 10$. Ezzel az oldalak: 30 cm, 40 cm, 50 cm. Tehát a háromszög területe: $T = \frac{30 \cdot 40}{2} = 600$ (cm^2).

Érdemes megfigyelni, hogy ha egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat szomszédos tagjai, akkor a háromszög oldalai arányosak a 3, 4, 5 számokkal. Ez azt jelenti, hogy bármely két ilyen háromszög hasonló egymáshoz, így szögei meghatározottak. Pl. a kisebbik hegyes szögére
$\sin\alpha = \frac{3}{5}$, ahonnan $\alpha \approx 36{,}87°$.
A feladat megoldásakor megfogalmaztuk, hogy a számtani sorozat bármely tagja ugyanannyival nagyobb az előtte levőnél, mint amennyivel kisebb az utána következő tagnál. Ezek szerint kimondhatjuk:

A számtani sorozat bármely – elsőtől különböző – tagja a szomszédos tagjainak a **számtani közepe:**
$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

4. példa Igazoljuk, hogy ha a, b, c olyan valós számok, melyekre $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ és $\frac{1}{a+b}$ egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor a^2, b^2, c^2 ugyancsak egy számtani sorozat egymást követő tagjai!

Megoldás
Ha a megadott három tört egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor a középső a két szélsőnek számtani közepe. Ezek szerint írhatjuk:
$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{2}{a+c}.$$
Szorozzuk meg mindkét oldalt a közös nevezővel, végezzük el a megfelelő műveleteket, majd vonjuk össze a megfelelő tagokat!
$(a+c)(b+c) + (a+b)(a+c) = 2(a+b)(b+c)$,
$ab + bc + ac + c^2 + a^2 + ab + ac + bc = 2ab + 2b^2 + 2ac + 2bc$,
$c^2 + a^2 = 2b^2$, ahonnan $b^2 = \frac{a^2+c^2}{2}$.
A kapott egyenlőség pedig éppen azt fejezi ki, hogy az a^2, b^2, c^2 mennyiségek egy számtani sorozat egymást követő tagjai.

A számtani sorozatok és azoknak az elemi geometriában játszott szerepe már a középkorban is ismert volt. Nézzünk egy középkori nyelven írt feladatot:

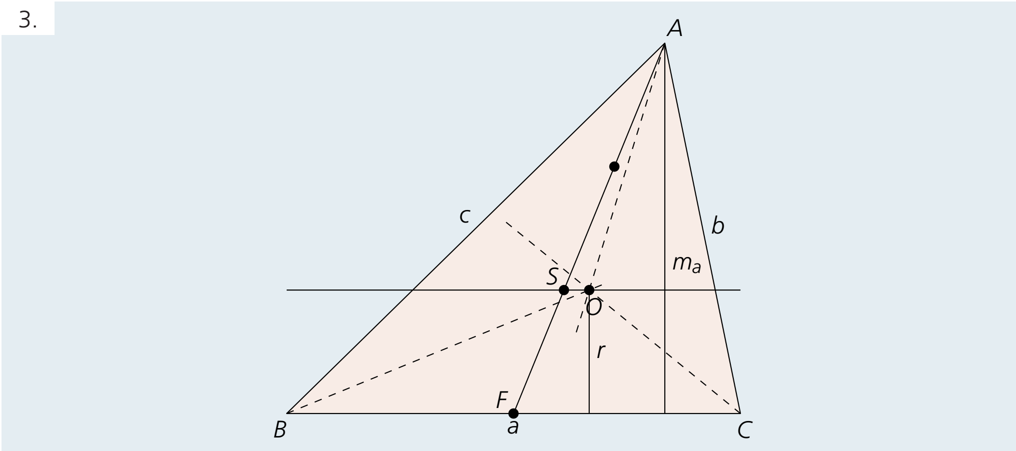
5. példa *„Lészen olybá egy háromszeglemény, melliknek is nehézkedési czentrálisán s belcirkulácziójának czentrálisán általvizitáló léniája paralell vala egyvalamely gyepüléniával. Igazoltassék, hogy ekkoron emez triangulum gyepüléniáinak mértékit az Úr az ő nagy bötsességében az számtani haladvány szerint valónak alkotá!”*
– azaz
Igazoljuk, hogy ha egy háromszög súlypontján és beírható köre középpontján átmenő egyenes párhuzamos a háromszög egy oldalával, akkor a háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő tagjai!

Megoldás

Tekintsük az ábrát, melyen S-sel, illetve O-val jelöltük a háromszög súlypontját, illetve a beírható körének középpontját! Ha e két ponton átmenő egyenes párhuzamos a háromszög egyik oldalával (pl. a-val), akkor a párhuzamos szelők tétele és a súlypont tulajdonságai miatt a beírható kör sugara a kérdéses oldalhoz tartozó magasság harmada *(3. ábra)*:

$$r = \frac{m_a}{3}$$

3.



A beírható kör r sugara és az a oldalhoz tartozó m_a magasság kifejezhető a háromszög T területével:

$$r = \frac{2T}{a+b+c}, \qquad m_a = \frac{2T}{a}, \qquad \text{így}$$

$$\frac{2T}{a+b+c} = \frac{2T}{3a}, \qquad \text{vagyis} \qquad a+b+c = 3a.$$

Innen

$$b+c = 2a, \qquad \text{azaz} \qquad a = \frac{b+c}{2}.$$

Ez pedig éppen azt fejezi ki, hogy az a, b, c oldalak egy számtani sorozat egymást követő tagjai, és a három oldal közül a sorozat középső tagja az, amellyel a feladatban szereplő egyenes párhuzamos.

Feladatok

1. K1 Melyik az a számtani sorozat, melyre

a) $2a_4 + a_5 = 21$ és $3a_3 - 4a_6 = -39$;

b) $a_1 + 2a_2 - a_3 = 26$ és $a_8 + 3a_2 = 32$;

c) $4a_3 - a_4 = 12$ és $a_8 - 2a_4 = 0$?

2. K2 Határozzuk meg x értékét, ha az alábbi három mennyiség egy számtani sorozat egymást követő tagjai:

$\log_2 x, \qquad \log_2 \sqrt{x}, \qquad \log_2(\log_2 \sqrt{x})$!

3. K2 Igazoljuk, hogy ha x, y, z egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor

$3(x^2+y^2+z^2) - (x+y+z)^2 = 6(x-y)^2$!

4. K2 Legyenek p és q pozitív egész számok $(p \neq q)$. Számítsuk ki a sorozat $(p+q)$-adik tagját, ha

$a_p = q \qquad$ és $\qquad a_q = p$!

5. K2 Mekkora legyen x értéke, hogy az alábbi három mennyiség egy számtani sorozat három egymást követő tagja legyen?

$\log_3(2x+1)$, $\log_3\sqrt{18x+9}$, $\log_3(x+5)$.

6. E1 Egy derékszögű háromszög befogói a, b, átfogója c. Mit mondhatunk a háromszög szögeiről, ha

$a_1 \cdot a^2 + a_3 \cdot b^2 = a_2 \cdot c^2$,

ahol a_1, a_2, a_3 egy nem állandó számtani sorozat első három tagja?

7. E2 Legyenek a_n és b_n pozitív egészekből álló számtani sorozatok. Igazoljuk, hogy az $a_{b_n} - b_{a_n}$ kifejezés értéke n-től független állandó!

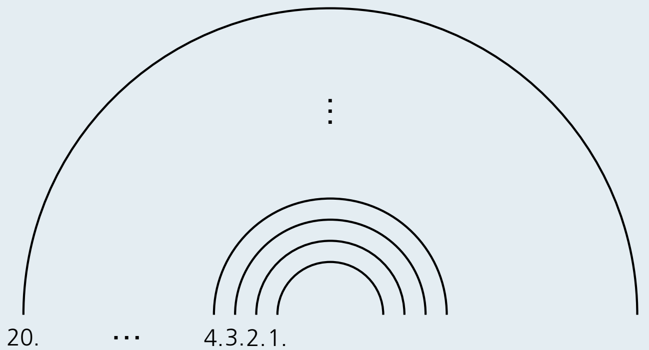
További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 875., 882., 885., 886., 887., 888., 890., 900., 901.

4. A számtani sorozat első n tagjának összege

Az előző leckében megismerkedtünk a számtani sorozat fogalmával, megtudtuk, hogyan lehet előállítani a sorozat első tagjának és differenciájának ismeretében a sorozat bármely tagját. Sok számtani sorozattal kapcsolatos probléma esetén arra van szükségünk, hogy a sorozat első néhány tagjának összegét határozzuk meg. Ebben a leckében ezt a kérdést fogjuk megvizsgálni.

1. példa Egy színház nézőterén a széksorokat félkör alakban helyezték el. Az első sorban 10 szék volt, és minden további sorban 4 székkel többet raktak le, mint a megelőző sorban. A nézőtéren 20 sor volt. Hány fős a nézőtér? *(4. ábra)*

4.



Megoldás

Az egyes sorokban elhelyezett székek száma egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, melynek első tagja 10, differenciája 4, és a sorozat első 20 tagjának összegére vagyunk kíváncsiak. A sorozat 20. tagja (az utolsó sorban levő székek száma):

$a_{20} = a_1 + 19d = 10 + 19 \cdot 4 = 86$.

Ezek szerint az alábbi összeget kell kiszámítanunk:

$10 + 14 + 18 + 22 + 26 + \ldots + 82 + 86$.

Azt vehetjük észre, hogy az összeg második tagja annyival nagyobb az első tagnál, mint amennyivel a 19. tag kisebb a 20. tagnál; a harmadik tag annyival nagyobb az elsőnél, amennyivel a 18. tag kisebb a 20. tagnál, és így tovább:

$10 + 86 = 14 + 82 = 18 + 78 = \ldots$.

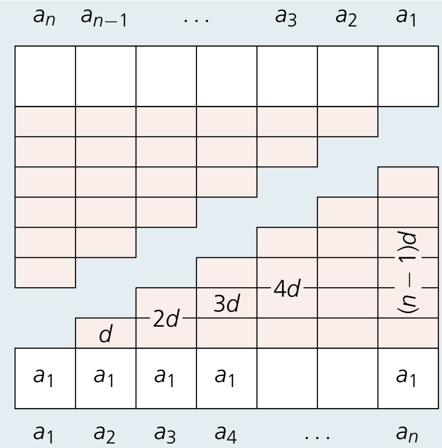
Ezek szerint az első és a 20. tag összegének 20-szorosa a keresett összegnek éppen a duplája, vagyis S_{20}-vel jelölve a keresett összeget:

$$S_{20} = \frac{(10+86)\cdot 20}{2} = 960.$$

Tehát a színház 960 férőhelyes.

A megoldásnál használt gondolatmenettel általánosíthatjuk ezt a kérdést. (Ezt szemlélteti az *5. ábra*.)

5.



Legyen a számtani sorozat első tagja a_1, differenciája d. Ha S_n-nel jelöljük az első n tag összegét, akkor

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, azaz

$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + [a_1 + (n-1)d]$.

Írjuk fel az első n tag összegét újra, de most nem az első tag és a differencia segítségével, hanem az n-edik tag és a differencia segítségével!

$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + [a_n - (n-1)d]$.

Ezt és az előbbi egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy

$2S_n = a_1 + a_n + a_1 + a_n + a_1 + a_n + \ldots + a_1 + a_n$.

A kapott egyenlőség jobb oldalán az $a_1 + a_n$ két tagú összeg éppen n-szer szerepel, így

$2S_n = (a_1 + a_n)n$.

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

Tehát a **számtani sorozat első *n* tagjának összege**:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

A kapott képletet szemlélve egy látszólagos ellentmondásra figyelhetünk fel. Ha a sorozat első tagja és differenciája is egész szám, akkor a sorozat minden tagja egész szám, és így a sorozat első n tagjának összege is egész szám kell, hogy legyen. Ugyanakkor, ha a képlet számlálójában páratlan szám szerepel, akkor azt 2-vel osztva nem kapunk egész számot. Az ellentmondást könnyen feloldhatjuk, ha az első n tag összegét közvetlenül az első taggal és a differenciával fejezzük ki. Írjuk a képletben szereplő a_n helyébe az $a_n = a_1 + (n-1)d$ egyenlőséget.

$$S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)d] \cdot n}{2}.$$

A kapott egyenlőség így is írható:

$$S_n = \frac{2a_1 n + n(n-1)d}{2}.$$

A számláló első tagja nyilván páros. De a második tag is páros, hiszen szerepel benne két szomszédos egész szám szorzata. Ezek szerint a számláló minden esetben páros, így annak fele minden esetben egész szám.

2. példa Egy kertészetben egymást követő sorokba ültették a gyümölcsfákat. Az első sorba 12 fát ültettek, majd minden sorba 3 fával többet ültettek, mint az azt megelőző sorba. Hány fát ültettek az utolsó sorba, ha összesen 297 gyümölcsfát ültettek el?

Megoldás

Az egyes sorokba ültetett fák száma egy számtani sorozat egymást követő tagjai. A sorozat első tagja $a_1 = 12$, differenciája $d = 3$. Mekkora az n értéke, ha a sorozat első n tagjának összege 297?

$$297 = \frac{[2 \cdot 12 + (n-1) \cdot 3] \cdot n}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad 594 = 3n^2 + 21n,$$

$$n^2 + 7n - 198 = 0.$$

$$n_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 792}}{2} = \frac{-7 \pm 29}{2}, \qquad n_1 = 11, \quad n_2 = -18.$$

A negatív megoldás nem jöhet számításba, így $n = 11$, tehát a gyümölcsfákat 11 sorba ültették. Így az utolsó sorba ültetett fák száma: $a_{11} = a_1 + 10d = 12 + 10 \cdot 3 = 42$.

3. példa Határozzuk meg azoknak a háromjegyű számoknak az összegét, melyek 10-zel osztva 1 maradékot adnak!

Megoldás

Azok a számok, amelyek 10-zel osztva 1 maradékot adnak, egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Ezek közül a háromjegyűeket vizsgálva, az első ilyen szám a 101, a sorozat differenciája 10, az utolsó ilyen szám a 991. Tehát az $a_n = a_1 + (n-1)d$ alapján

$991 = 101 + (n-1) \cdot 10$, azaz $(n-1) \cdot 10 = 890$, ahonnan $n = 90$.

Ez azt jelenti, hogy 90 db háromjegyű tagja van a számtani sorozatnak. E sorozat első 90 tagjának összege:

$$S_{90} = \frac{(101 + 991) \cdot 90}{2} = 49\,140.$$

4. példa Egy számtani sorozat 15. tagja egyenlő a sorozat differenciájával. Határozzuk meg a sorozat első 27 tagjának összegét!

Megoldás

A feltétel szerint $a_{15} = d$, azaz $a_1 + 14d = d$, ahonnan $a_1 = -13d$.

A sorozat első 27 tagjának összege:

$$S_{27} = \frac{[2a_1 + 26d] \cdot 27}{2}.$$

Felhasználva a feltételből a_1-re kapott kifejezést:

$$S_{27} = \frac{[-26d + 26d] \cdot 27}{2} = 0.$$

Tehát, ha a sorozatban $a_{15} = d$, akkor $S_{27} = 0$.

Feladatok

1. K1 Adott a számtani sorozat első tagja és differenciája. Számítsuk ki az első 20 tag összegét!

a) $a_1 = 11, \ d = 3$; *b)* $a_1 = 45, \ d = -4$; *c)* $a_1 = \frac{4}{3}, \ d = -\frac{1}{6}$.

2. K1 Egy számtani sorozat második és ötödik tagjának összege 32,5. A sorozat első tizenöt tagjának összege 412,5. Tagja-e a sorozatnak az 55, és ha igen, hányadik tagja?

3. K1 Oldjuk meg a következő egyenletet: $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280$!

4. K2 Egy számtani sorozat első tagjához 1-et, második tagjához 2-t, harmadik tagjához 3-at… és így tovább,… végül tizenkettedik tagjához 12-t hozzáadtunk. Mennyivel növekedett így a sorozat első 12 tagjának összege?

5. K2 Egy számtani sorozatban minden n-re $\frac{S_{2n}}{S_n} = 4$. Mivel egyenlő a sorozat 15. és 5. tagjának hányadosa?

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 902., 903., 907., 909., 910., 916., 920., 925., 930.

6. E1 Egy számtani sorozat első elemét csökkentettük, differenciáját pedig ugyanannyival növeltük. Az így nyert új számtani sorozat első n tagjának összege egyenlő az eredeti számtani sorozat első n tagjának összegével. Határozzuk meg n értékét!

7. E1 Egy számtani sorozatban valamely n és k pozitív egész számokra $S_n = S_k$ $(n \neq k)$. Igazoljuk, hogy ekkor $S_{n+k} = 0$!

5. A mértani sorozat fogalma

Az előző két leckében a számtani sorozattal ismerkedtünk meg. Megkaptuk a számtani sorozat n-edik tagját, valamint a sorozat első n tagjának összegét. A mostani leckében egy másik speciális sorozatot fogunk vizsgálni, mellyel ugyanilyen gyakran találkozhatunk a gyakorlati életben. Fogalmazzuk meg, milyen közös tulajdonsággal rendelkeznek az alábbi számsorozatok!

a) $3, \quad 6, \quad 12, \quad 24, \quad 48, \quad 96, \quad \ldots$

b) $40, \quad 20, \quad 10, \quad 5, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{5}{4}, \quad \ldots$

c) $3, \quad -3, \quad 3, \quad -3, \quad 3, \quad -3, \quad 3, \quad \ldots$

d) $2, \quad -6, \quad 18, \quad -54, \quad 162, \quad -486, \quad \ldots$

Hamar felfedezhetjük e sorozatok közös tulajdonságát. Minden sorozatra jellemző, hogy bármely tagját megkapjuk, ha az előtte levő tagot ugyanazzal a valós számmal megszorozzuk. Tehát minden sorozatnak van egy első tagja és egy a sorozatra jellemző valós szám, mellyel a sorozat tagjait megszorozva kapjuk a sorozat következő tagját. Ezek szerint, ha valamelyik sorozat n-edik tagját a_n-nel, a sorozatra jellemző szorzót q-val jelöljük, akkor $n > 1$ esetén a sorozat tagjait az alábbi rekurzív képlettel adhatjuk meg:

$a_n = a_{n-1} \cdot q$.

A fenti sorozatokban

a) esetben $a_1 = 3$, $q = 2$;

b) esetben $a_1 = 40$, $q = \frac{1}{2}$;

c) esetben $a_1 = 3$, $q = -1$;

d) esetben $a_1 = 2$, $q = -3$.

Az ilyen tulajdonsággal rendelkező számsorozatot **mértani sorozatnak** nevezzük

Mértani sorozat

Mértani sorozat

A mértani sorozat olyan számsorozat, melyben bármely két szomszédos tag (a nagyobb sorszámú tag és az azt megelőző tag) hányadosa (kvóciense) a sorozatra jellemző állandó.

A definícióból következik, hogy a mértani sorozatnak sem az első tagja, sem a hányadosa nem lehet 0. Ha a sorozat első tagját a_1-gyel, hányadosát q-val jelöljük, akkor

$a_2 = a_1 \cdot q$,

$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$,

$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$,

stb.

A felsorolásból könnyen kiolvasható, hogy a mártani sorozat n-edik tagja

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

1. példa Egy mértani sorozat harmadik tagja 16, a sorozat hatodik tagja 128. Számítsuk ki a mértani sorozat első tagját és hányadosát!

Megoldás

A feltételek szerint

$a_1 q^2 = 16$ és $a_1 q^5 = 128$.

Osszuk el egymással a két egyenletet!

$$\frac{a_1 q^5}{a_1 q^2} = \frac{128}{16},$$

ahonnan ($a_1 \neq 0$-val és $q \neq 0$-val) egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$q^3 = 8$, vagyis $q = 2$.

Ezt az első egyenletbe helyettesítve

$a_1 \cdot 4 = 16$, tehát $a_1 = 4$.

Vagyis a keresett mértani sorozat első tagja 4, hányadosa 2.

Felvetődik a kérdés, miért nevezzük „mértani" sorozatnak a most megismert sorozatot. A számtani sorozatok esetében azt vehettük észre, hogy annak bármely tagja annyival nagyobb az előtte levő tagnál, amennyivel kisebb a rákövetkező tagnál. Ebből következett, hogy a számtani sorozat bármely tagja a szomszédos tagjainak számtani közepe.

Most vizsgáljuk meg a mértani sorozat valamely három szomszédos tagját!

a_k, $a_k q$, $a_k q^2$.

E három tag közül a két szélsőnek szorzata:

$a_k \cdot a_k q^2 = a_k^2 q^2$,

ez éppen a középső tag négyzete.

A mértani sorozat bármely három szomszédos tagja közül a középső négyzete a két szélső szorzatával egyenlő. Ha a sorozat minden tagja pozitív, akkor bármely három szomszédos tagja közül a középső a két szélsőnek mértani közepe:

$\sqrt{a_k \cdot a_{k+2}} = a_{k+1}$.

$\sqrt{a_k \cdot a_{k+2}} = a_{k+1}$

2. példa Egy mértani sorozat első két tagja: $a_1 = \frac{4}{\sqrt{5}-1}$, $a_2 = \frac{2}{\sqrt{5}+1}$. Határozzuk meg a sorozat harmadik tagját!

Megoldás

Az előbbi megállapítások alapján $a_1 \cdot a_3 = a_2^2$, tehát esetünkben

$$\frac{4}{\sqrt{5}-1} \cdot a_3 = \frac{4}{(\sqrt{5}+1)^2}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{a_3}{\sqrt{5}-1} = \frac{1}{6+2\sqrt{5}},$$

$$a_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{6+2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2(3+\sqrt{5})}.$$

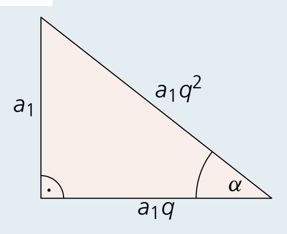
Egyszerűbb alakra jutunk, ha gyöktelenítjük a kapott tört nevezőjét. Ennek érdekében bővítsük a törtet $(3-\sqrt{5})$-tel. A mértani sorozat harmadik tagja:

$$a_3 = \frac{(\sqrt{5}-1)(3-\sqrt{5})}{2(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \frac{4\sqrt{5}-8}{2(9-5)} = \frac{4\sqrt{5}-8}{8} = \frac{\sqrt{5}-2}{2}.$$

3. példa Egy derékszögű háromszög oldalai egy mértani sorozat egymást követő tagjai. Mekkorák a háromszög szögei?

Megoldás

6.



Legyen a háromszög két befogója a_1, a_1q, az átfogó a_1q^2.

A *6. ábrán* α-val jelölt szögre $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_1}{a_1 q} = \frac{1}{q}$.

Ezek szerint a mértani sorozat hányadosát kell meghatároznunk.

Írjuk fel a Pitagorasz-tételt e derékszögű háromszögre:

$a_1^2 + a_1^2 q^2 = a_1^2 q^4$, azaz $1 + q^2 = q^4$,

$q^4 - q^2 - 1 = 0$.

q^2-ben másodfokú egyenlethez jutottunk. Ennek megoldása:

$$(q^2)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

A negatív gyök nyilván nem lehetséges, így azt kaptuk, hogy

$$q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Ezzel a háromszög egyik hegyes szögére:

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{q} = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}} \approx 0{,}7862$, ahonnan $\alpha \approx 38{,}17°$,

a másik hegyesszög $\beta = 90° - 38{,}17° = 51{,}83°$.

Érdemes megfigyelni, hogy azok a derékszögű háromszögek, melyeknek oldalai egy mértani sorozat egymást követő tagjai mind hasonlók egymáshoz. (Ugyanezt láttuk számtani sorozatok esetében is, vagyis azok a derékszögű háromszögek, melyeknek oldalai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, mind hasonlók egymáshoz.)

Konstans sorozat

Az olyan számsorozatot, melynek minden tagja ugyanaz a szám, szokás **állandó**, vagy más néven **konstans** sorozatnak nevezni. Az ilyen konstans sorozat tekinthető egy olyan számtani sorozatnak, melynek a differenciája $d = 0$, de tekinthető olyan mértani sorozatnak is, melynek a hányadosa $q = 1$. Vajon létezik-e még olyan (tehát nem konstans) számsorozat, amelyik számtani és egyben mértani sorozat is?

4. példa Határozzuk meg az összes olyan mértani sorozatot, amely egyben számtani sorozat is!

Megoldás

Legyen a mértani sorozat első három tagja: a_1, a_1q, a_1q^2. Ha e három mennyiség egyben egy számtani sorozat három egymást követő tagjai, akkor a középső tag a két szélsőnek számtani közepe, tehát írhatjuk:

$\frac{a_1 + a_1 q^2}{2} = a_1 q$, ahonnan $a_1 \neq 0$ miatt $\frac{1+q^2}{2} = q$,

$1 + q^2 = 2q$, tehát $q^2 - 2q + 1 = 0$.

A kapott egyenlet bal oldala teljes négyzet:
$(q-1)^2 = 0$, vagyis csak $q = 1$ lehetséges.
Arra jutottunk, hogy ha egy mértani sorozat egyben számtani sorozat is, akkor a mértani sorozat hányadosa csak 1 lehet, vagyis az csak konstans sorozat lehet.

Feladatok

1. K1 Számítsuk ki a mértani sorozat első tagját és hányadosát, ha

a) $a_5 - a_1 = 15$ és $a_4 - a_2 = 6$;
b) $a_2 + a_5 - a_4 = 10$ és $a_3 + a_6 - a_5 = 20$;
c) $a_1 + a_4 = 27$ és $a_2 + a_3 = 18$!

2. K1 Egy mértani sorozat első három tagjának összege 21. A sorozat következő három tagjának összege 168. Melyik ez a mértani sorozat?

3. K1 Igaz-e, hogy az alábbi három szám egy mértani sorozat három egymást követő tagja?

$$\frac{3}{2\sqrt{3}-1}, \qquad \frac{6}{6-\sqrt{3}}, \qquad \frac{8\sqrt{3}+4}{11}.$$

4. K2 Legyen a_n egy mértani sorozat n-edik tagja. Igazoljuk, hogy ha k, l és m egy számtani sorozat három egymást követő tagja, akkor a_k, a_l és a_m egy mértani sorozat három egymást követő tagja!

5. K2 Egy mértani sorozat első tagja a_1, hányadosa q. Határozzuk meg a sorozat első n tagjának a szorzatát!

6. E1 Egy pozitív számokból álló mértani sorozat első 5 tagjának a szorzata egyenlő az első 10 tagjának a szorzatával. Mivel egyenlő az első 15 tag szorzata?

7. E1 Igazoljuk, hogy ha a_n egy mértani sorozat n-edik tagja, akkor az alábbi három mennyiség is egy mértani sorozat három egymást követő tagja!

$$a_1 + a_2, \qquad a_1 + 2a_2 + a_3, \qquad a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4.$$

8. K2 Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív számokból álló mértani sorozat tagjainak 10-es alapú logaritmusa egy számtani sorozat egymás utáni tagja!

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 932., 938., 941., 944., 945., 946., 947.

6. A mértani sorozat első *n* tagjának összege

Ahogy a számtani sorozat esetében, ugyanúgy a mértani sorozat esetében is fontos ismernünk a sorozat első n tagjának összegét.
Legyen a mértani sorozat első tagja a_1, hányadosa q, és jelöljük az első n tag összegét S_n-nel:
$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-1}$.
Szorozzuk meg ennek az egyenletnek mindkét oldalát q-val!
$q \cdot S_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + \ldots + a_1q^n$.
Most adjuk hozzá a kapott egyenlethez az előző egyenlet (–1)-szeresét!

$$-S_n = -a_1 - \cancel{a_1q} - \cancel{a_1q^2} - \cancel{a_1q^3} - \cancel{\ldots}\ldots\ldots - \cancel{a_1q^{n-1}}$$
$$q \cdot S_n = \cancel{a_1q} + \cancel{a_1q^2} + \cancel{a_1q^3} + \cancel{a_1q^4} + \ldots + \cancel{a_1q^{n-1}} + a_1q^n.$$

A jobb oldalon az első és az utolsó tag kivételével minden tag kiesik, így azt kapjuk, hogy
$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1)$.

$S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

A mértani sorozat első *n* tagjának összege

Ha a sorozat nem állandó, azaz $q \neq 1$, akkor oszthatunk $(q-1)$-gyel, így kapjuk a **mértani sorozat első *n* tagjának összegét**:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ha a sorozat állandó, azaz $q = 1$, akkor a sorozat minden tagja a_1, így az első n tag összege $S_n = n \cdot a_1$.

1. példa Egy mértani sorozat első tagja $a_1 = \frac{1}{2}$, hányadosa $q = 2$. Számítsuk ki a sorozat első 10 tagjának összegét!

Megoldás

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = \frac{1024 - 1}{2} = 511{,}1.$$

2. példa Egy mértani sorozat hányadosa $q = 3$. A sorozat n-edik tagja 486. A sorozat első n tagjának összege 728. Számítsuk ki a sorozat első tagját!

Megoldás

Írjuk ki részletesen a feladat feltételeit.

$a_n = 486 = a_1 \cdot 3^{n-1}$, $\qquad S_n = 728 = a_1 \cdot \dfrac{3^n - 1}{2}$:

Az első egyenletből:

$486 = a_1 \cdot \dfrac{3^n}{3}$, $\quad$ azaz $\quad a_1 \cdot 3^n = 1458$, $\quad$ ahonnan $\quad a_1 = \dfrac{1458}{3^n}$.

A második egyenletből:

$a_1 \cdot (3^n - 1) = 1456$.

Helyettesítsük be a kapott egyenletbe az előbb a_1-re kapott értéket!

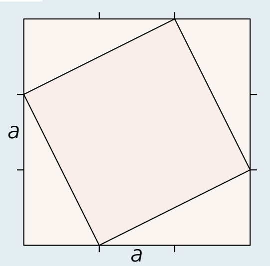
$\dfrac{1458}{3^n} \cdot (3^n - 1) = 1456$, $\quad$ azaz $\quad 1458 \cdot 3^n - 1458 = 1456 \cdot 3^n$,

$2 \cdot 3^n = 1458$, $\quad$ innen $\quad 3^n = 729 = 3^6$, $\quad$ tehát $\quad n = 6$.

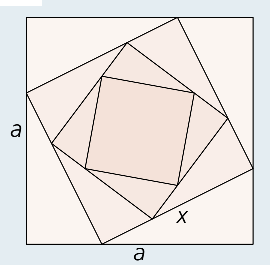
Ezek szerint a sorozat 6 tagját adtuk össze. A sorozat első tagját megkapjuk, ha n kapott értékét valamelyik kiindulási egyenletbe visszahelyettesítjük:

$486 = a_1 \cdot 3^5$, $\quad$ ahonnan $\quad a_1 = \dfrac{486}{3^5} = \dfrac{486}{243} = 2$.

7. a



7. b



3. példa Egy a oldalú négyzet minden oldalát három egyenlő részre osztottuk, majd az osztópontok közül néhányat összekötve *(7. a ábra)* egy újabb négyzetet rajzoltunk. Az újabb négyzettel ugyanígy jártunk el, majd a harmadik, negyedik, stb. négyzettel is ugyanezt tettük *(7. b ábra)* mindaddig, amíg 8 db négyzet lett egymásba rajzolva. E 8 db négyzet területének összege hányszorosa az eredeti négyzet területének?

Megoldás

Bármely négyzet és a belerajzolt négyzet területeinek aránya ugyanannyi, tehát az egymás után berajzolt négyzetek területei egy mértani sorozat egymást követő tagjai. A mértani sorozat első tagja $a_1 = a^2$. A második tag meghatározásához ki kell számítanunk az első berajzolt négyzet oldalát, illetve területét. Ezt a Pitagorasz-tétel segítségével kaphatjuk meg. Ha az első berajzolt négyzet oldala x, akkor

$x^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 + \left(\frac{1}{3}a\right)^2 = \frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2 = \frac{5}{9}a^2$.

Tehát a mértani sorozat második tagja $a_2 = \frac{5}{9}a^2$. Ezek szerint a mértani sorozat hányadosa:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{5}{9}a^2}{a^2} = \frac{5}{9}.$$

Az első 8 négyzet területének összege:

$$S_8 = a^2 \cdot \frac{\left(\frac{5}{9}\right)^8 - 1}{\frac{5}{9} - 1} \approx a^2 \cdot \frac{1 - 0{,}00907}{\frac{4}{9}} \approx a^2 \cdot 2{,}2296.$$

A 8 db négyzet területének összege az eredeti négyzet területének kb. 2,2296-szerese.

4. példa Egy dél-amerikai mocsári teknős születési súlya 10 dkg. A teknős 1 éves koráig testsúlyát megduplázza, majd ezt követően minden évben $\frac{2}{3}$ annyit növekszik, mint az azt megelőző évben. Mekkora lesz a teknős súlya 12 éves korára?

Megoldás

Az 1. év végén a teknős súlya: a 10 dkg születési súly + 10 dkg növekedés.

A 2. év végén a teknős súlya: az első év végi súly + az előző évi növekedés $\frac{2}{3}$ része, tehát $10 + 10 + \frac{2}{3} \cdot 10$.

A 3. év végén a teknős súlya: a 2. év végi súly + a 2. évi növekedés $\frac{2}{3}$ része, vagyis: $10 + 10 + \frac{2}{3} \cdot 10 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 10$.

A gondolatsort folytatva az alábbi sorozatot írhatjuk fel:

1. év végén: $T_1 = 10 + 10$,

2. év végén: $T_2 = 10 + 10 + \frac{2}{3} \cdot 10$,

3. év végén: $T_3 = 10 + 10 + \frac{2}{3} \cdot 10 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 10$,

4. év végén: $T_4 = 10 + 10 + \frac{2}{3} \cdot 10 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 10 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 10$,

⋮

12. év végén: $T_{12} = 10 + 10 + \frac{2}{3} \cdot 10 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 10 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 10 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \cdot 10$.

A kapott összeget így is írhatjuk:

$$T_{12} = 10 + 10\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{11}\right].$$

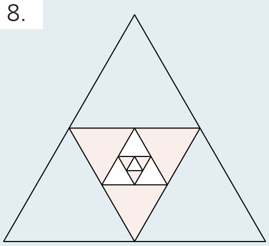
A szögletes zárójelben egy mértani sorozat első 12 tagjának összege szerepel. E sorozat első tagja $a_1 = 1$, hányadosa $q = \frac{2}{3}$. Ezt az összeget S-sel jelölve:

$$S = 1 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{12} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{12}}{\frac{1}{3}} \approx 3 \cdot (1 - 0{,}0077) \approx 3 \cdot 0{,}9923 = 2{,}9769.$$

Tehát a teknős súlya a 12. év végén:

$T_{12} \approx 10 + 10 \cdot 2{,}9769 \approx 39{,}769$ (dkg).

8.



További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 949., 951., 952., 953., 955., 956., 957., 958.

Feladatok

1. K1 Számítsuk ki a mértani sorozat első 15 tagjának összegét, ha
a) $a_1 = 3{,}5$, $q = 2$; *b)* $a_2 = 12$, $a_5 = 324$; *c)* $a_3 = 2{,}5$, $q = \frac{1}{2}$!

2. K1 Egy szabályos háromszög oldalfelező pontjai egy újabb szabályos háromszöget határoznak meg. Ennek a háromszögnek az oldalfelező pontjai szintén, és így tovább. *(8. ábra)* Ha az eredeti háromszögbe ilyen módon berajzolunk még 13 háromszöget, akkor mekkora lesz az így keletkezett 14 db háromszög területének összege, ha az eredeti háromszög minden oldala 1?

3. K1 Egy afrikai kúszó növény ültetése után 1 évvel 80 cm magasra nő. Ezt követően minden évben $\frac{2}{5}$ annyit növekszik, mint az azt megelőző évben. Milyen magasra növekszik ez a növény 8 éves korára?

4. K2 Egy nem állandó mértani sorozat első 6 tagjának összege az első három tag összegének 28-szorosa. Mekkora a sorozat hányadosa?

5. K2 2-nek hányadik hatványával egyenlő az alábbi szorzat:
$2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2} \cdot \sqrt[32]{2} \cdot \sqrt[64]{2}$?

6. K2 Egy mértani sorozat első tagja $a_1 = 3$, hányadosa $q = 2$. Milyen n-re teljesül, hogy a sorozat első n tagjának összege osztható 5-tel?

7. E1 Legyenek n és k adott pozitív egész számok. Egy nem állandó mértani sorozat első $2k$ tagjának összege az első k tag összegének n-szerese. Mekkora a sorozat hányadosa?

8. E2 Igazoljuk, hogy ha egy csupa 4-es számjegyből álló $2n$ jegyű számból kivonunk egy csupa 8-asból álló n-jegyű számot, akkor négyzetszámot kapunk!

7. Összetett feladatok számtani és mértani sorozatokra

Az előző néhány leckében megismerkedtünk a számtani és a mértani sorozatokkal. Ebben a leckében még egyszer kiemeljük e sorozatok legfontosabb jellemzőit, majd mindkét sorozatot szerepeltető összetettebb problémákat vizsgálunk.

	a_n	S_n	a, b, c
Számtani sorozat	$a_1 + (n-1) \cdot d$	$\frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$	$b = \frac{a+c}{2}$
Mértani sorozat	$a_1 \cdot q^{n-1}$	$a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, ha $q \neq 1$	$b^2 = ac$
		$n \cdot a_1$, ha $q = 1$	

A következő feladatokban számtani és mértani sorozatok egyszerre szerepelnek. Ilyen problémák vizsgálatakor először érdemes a feladatban szereplő feltételeket részletesen kiírni, amelyből az első tag és a differencia (vagy az első tag és a hányados) között kaphatunk egy összefüggést. Végül ezt az összefüggést felhasználva már könnyen eljuthatunk a kiszámítandó mennyiséghez vagy a bizonyítandó állításhoz.

1. példa Egy számtani sorozat első három tagjának összege 21. Ha a második tagból 1-et elveszünk, a harmadik taghoz pedig 1-et hozzáadunk, akkor e három szám egy mértani sorozat három egymást követő tagja lesz. Adjuk meg az eredeti számtani sorozat első 5 tagját!

Megoldás

A feltételek szerint

$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 21$, azaz $3a_1 + 3d = 21$,

$a_1 + d = 7$, ahonnan $a_1 = 7 - d$.

Ha az a_1, $(a_2 - 1)$ és $(a_3 + 1)$ mennyiségek egy mértani sorozat egymást követő tagjai, akkor

$(a_2 - 1)^2 = a_1(a_3 + 1)$, tehát $(a_1 + d - 1)^2 = a_1(a_1 + 2d + 1)$.

Most használjuk fel az előbb a_1-re kapott kifejezést!

$(7 - d + d - 1)^2 = (7 - d)(7 - d + 2d + 1)$, vagyis

$36 = (7 - d)(8 + d)$, ahonnan $d^2 + d - 20 = 0$.

A kapott másodfokú egyenlet megoldásai: $d_1 = 4$, $d_2 = -5$.

Ha $d = 4$, akkor $a_1 = 3$, ha $d = -5$, akkor $a_1 = 12$.

A feladat feltételeinek tehát két számtani sorozat felel meg. E sorozatok első 5-5 tagja:

3, 7, 11, 15, 19, 24, illetve 12, 7, 2, –3, –8.

2. példa Egy nem állandó mértani sorozat első három tagjának összege 52. E három tag tekinthető egy számtani sorozat első, második és ötödik tagjának. Adjuk meg a mértani sorozat első 5 tagját!

Megoldás

A feltételek szerint $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 52$. Ha e három tag egy számtani sorozat első, második és ötödik tagja, akkor e számtani sorozat differenciája $d = a_1 q - a_1$. Mivel a számtani sorozat második és ötödik tagja között 3 differencia van, ezért

$3 \cdot (a_1 q - a_1) = a_1 q^2 - a_1 q$.

Az egyenlet mindkét oldalát eloszthatjuk a_1-gyel:

$3q - 3 = q^2 - q$, azaz $q^2 - 4q + 3 = 0$.

A másodfokú egyenlet megoldásai: $q_1 = 1$, $q_2 = 3$. Mivel a feltételek szerint a sorozat nem állandó, így csak $q = 3$ lehet. Ezt az első feltétel egyenletébe visszahelyettesítve:

$a_1 + 3a_1 + 9a_1 = 52$, ahonnan $a_1 = 4$.

Az eredeti mértani sorozat első öt tagja: 4, 12, 36, 108, 324.

3. példa Igazoljuk, hogy ha egy nem állandó számtani sorozat első, második és ötödik tagja egy mértani sorozat egymást követő tagjai, akkor a számtani sorozat első, harmadik és tizenharmadik tagjai is egy mértani sorozat egymást követő tagjai!

Megoldás

Ha egy számtani sorozat első, második és ötödik tagja egy mértani sorozat egymást követő tagjai, akkor

$(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 4d)$, azaz $a_1^2 + 2a_1 d + d^2 = a_1^2 + 4a_1 d$, ahonnan $d^2 = 2a_1 d$,

Mivel a sorozat nem állandó, így $d \neq 0$. Tehát azt kapjuk, hogy $d = 2a_1$.

Ezek után azt kell igazolnunk, hogy a_1, a_3 és a_{13} ugyancsak egy mértani sorozat szomszédos tagjai. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$a_3^2 = a_1 \cdot a_{13}$, vagyis $(a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 12d)$.

Most használjuk fel az előbb a_1 és d között kapott összefüggést:

$(a_1 + 4a_1)^2 = a_1(a_1 + 24a_1)$,

$25a_1^2 = 25a_1^2$,

$(5a_1)^2 = a_1 \cdot 25a_1$.

Tehát valóban: ha a számtani sorozat első, második és ötödik tagja egy mértani sorozat egymást követő tagjai, akkor a számtani sorozat első, harmadik és tizenharmadik tagjai is egy mértani sorozat egymást követő tagjai.

4. példa Legyen a_n egy számtani, b_n egy pozitív számokból álló mértani sorozat. Tudjuk, hogy $a_1 = b_1 = 1$, $a_3 = b_3 \neq 1$, továbbá $a_{21}^5 = b_{21}$. Adjuk meg a számtani és a mértani sorozat első 5 tagját!

Megoldás

Mivel $a_1 = b_1 = 1$ és $a_3 = b_3 \neq 1$, ezért sem a számtani sem a mértani sorozat nem lehet állandó. Ha a sorozatok harmadik tagjai egyenlők, akkor

$1 + 2d = q^2$.

A harmadik feltételből pedig

$(1 + 20d)^5 = q^{20}$.

Vonjunk most ötödik gyököt:

$1 + 20d = q^4$.

Az előző egyenletünkben q^2 szerepel, így ezt az utóbbi egyenletbe helyettesítve kapjuk:

$(1 + 2d)^2 = 1 + 20d$, azaz $1 + 4d + 4d^2 = 1 + 20d$,

$4d^2 = 16d$, ahonnan $d = 4$.

Ezzel $1 + 8 = q^2$, ahonnan $q = 3$. (A feltétel miatt a $q = -3$ nem lehet.)

A számtani, illetve a mértani sorozat első 5-5 tagja:

1, 5, 9, 13, 17, illetve 1, 3, 9, 27, 81.

Feladatok

1. K1 Egy pozitív számokból álló számtani sorozat harmadik, negyedik és ötödik tagjának összege 33. Ha a sorozat első és harmadik tagjából elveszünk 1-et, a hatodik taghoz pedig hozzáadunk 1-et, akkor e három mennyiség egy mértani sorozat három egymást követő tagja lesz. Határozzuk meg az eredeti számtani sorozat első tagját és differenciáját!

2. K1 Egy nem állandó mértani sorozat első három tagjának összege 21. E három szám tekinthető egy számtani sorozat első, második és negyedik tagjának. Adjuk meg az eredeti mértani sorozat első 6 tagját!

3. K2 Egy pozitív számokból álló nem állandó számtani sorozat első, második és negyedik tagja egy mértani sorozat egymást követő tagjai. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a számtani sorozat első, harmadik és kilencedik tagjainak 10-es alapú logaritmusa egy számtani sorozat egymást követő tagjai!

4. K2 Egy pozitív egészekből álló számtani sorozat első tagja 4, egy pozitív egészekből álló mértani sorozat első tagja 2. A számtani sorozat differenciája egyenlő a mértani sorozat hányadosának felével. Ha a mértani sorozat második tagjához 1-et hozzáadunk, akkor a számtani sorozat egy tagját kapjuk. Adjuk meg a két sorozat első 5-5 tagját!

5. E1 Az x, y, z nullától különböző számok egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Az y, x, z számok egy mértani sorozat egymást követő tagjai. A számtani sorozat differenciája egyenlő a mértani sorozat hányadosával. Határozzuk meg az x, y, z számokat!

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 980., 981., 982., 983., 984., 987., 993., 1051., 1055.

8. Kamatos kamat

A hétköznapi életben előfordulhat, hogy valamely bankban elhelyezzük pénzünket. Ekkor bizonyos időszakonként kamatot kapunk. E kamattal pénzünk megnövekszik, s így a következő időszakban már az előző kamattal megnövekedett pénzünk fog a megfelelő módon kamatozni, azaz az előző időszakra járó kamat is kamatozik. Ezt nevezzük kamatos kamatnak.

Kamatos kamat

1. példa Elhelyezünk a bankban 100 000 Ft-t évi 6%-os kamatra. Mennyit ér a pénzünk 8 év múlva?

Megoldás.
Először vizsgáljuk meg részletesen, mennyit ér a pénzünk az 1., 2., 3. év végén!
Az 1. év végén pénzünk: az elhelyezett 100 000 Ft + annak 6%-a, azaz
$100\,000 + 100\,000 \cdot 0{,}06 = 100\,000 \cdot 1{,}06$.
A 2. év végén pénzünk: az első év végén meglevő pénzünk + annak 6%-a, azaz
$100\,000 \cdot 1{,}06 + 100\,000 \cdot 1{,}06 \cdot 0{,}06 = 100\,000 \cdot 1{,}06 \cdot (1 + 0{,}06) = 100\,000 \cdot 1{,}06^2$.
A 3. év végén pénzünk: a 2. év végén meglevő pénzünk + annak 6%-a, azaz
$100\,000 \cdot 1{,}06^2 \cdot 1{,}06 = 100\,000 \cdot 1{,}06^3$.
Látható, hogy minden év végén 1,06-szor annyi lesz a pénzünk, mint amennyi az azt megelőző évben volt. Ezek szerint az egymást követő évek végén meglevő pénzünk egy olyan 8 tagú mértani sorozatot alkot, melynek első tagja és hányadosa:
$a_1 = 100\,000 \cdot 1{,}06$, $\quad q = 1{,}06$.
Így a 8. év végén pénzünk értéke:
$a_8 = a_1 q^7 = 100\,000 \cdot 1{,}06^8 \approx 159\,385$ (Ft).

Hasonló gondolatmenettel kaphatjuk meg a probléma általánosítását. Tegyük fel, hogy elhelyeztünk a bankban egy A_0 összeget évi p%-os kamatra. Mennyit ér a pénzünk n év múlva? A feladatban látott gondolatmenetet használva kapjuk a választ.

n év múlva pénzünk értéke:
$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

2. példa Andrásnak 22 000 Ft-ja van. Beteszi a pénzét egy bankba, ahol évi 8,5% kamatot fizetnek rá. Hány év múlva lesz 36 000 Ft-ja?

Megoldás.
András pénze n év múlva $22\,000 \cdot 1{,}085^n$ Ft lesz. Azt kell tehát kiszámítanunk, hogy milyen n-re lesz ez az érték 36 000 Ft.
$22\,000 \cdot 1{,}085^n = 36\,000$.
Egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy
$1{,}085^n = \frac{18}{11} \approx 1{,}6363$.
Vegyük az egyenlet mindkét oldalának 10-es alapú logaritmusát:
$\lg(1{,}085)^n \approx \lg 1{,}6363$.

Felhasználva a hatvány logaritmusáról tanultakat:

$$n \cdot \lg 1{,}085 \approx \lg 1{,}6363, \qquad \text{ahonnan} \qquad n = \frac{\lg 1{,}6363}{\lg 1{,}085} \approx 6{,}04.$$

Tehát András pénze ilyen kamat mellett a 7. év elején éri el a 36 000 Ft-ot. (Mivel a kamatot év végén fizeti a bank, így Andrásnak meg kell sajnos várnia a 7. év végét, hogy a szükséges pénzéhez hozzájusson.)

Fontos figyelmeztetés!

Példánk egy banki ügylet leegyszerűsített változatát mutatta be. Természetesen a banki ügyletek (akár egy összeg hosszabb lekötéséről van szó, akár rövid- vagy hosszú távú hitel felvételéről) ennél jóval összetettebb, bonyolultabb számításokat igényelnek. Hitelfelvételnél például ügyelnünk kell arra, hogy ne csak a bank által ajánlott hitelkamatot vegyük figyelembe, hanem az ennél sokkal többet mondóbb úgynevezett hiteldíj-mutatót (THM). Ez a meghirdetett banki hitel mellett még sok minden egyéb költséget is tartalmazhat; pl.: hitelbírálati díj, számlavezetési díj, számlanyitási díj, számlazárási díj, stb.) Ez a THM az egyes bankok esetében, sőt még bankon belül is változhat attól függően, hogy milyen hitelcsomagot akarunk igénybe venni. Fontos információ még egy hosszabb távú hitelfelvételnél, hogy a banki hitel (és természetesen ezzel a THM) fix, vagy változó kamatozású. Előfordulhat ugyanis, hogy a kérdéses banki kamat – a különböző nemzetközi pénzügyi folyamatok romlása vagy javulása miatt – növekedhet vagy esetleg csökkenhet.

Más a helyzet, ha pénzünket hosszabb távon szeretnénk lekötni egy bankban. Ez általában fix kamatozású, független attól, hogy a futamidő alatt (ami akár 10 év is lehet) az ország pénzügyi helyzete javul vagy romlik. Természetesen – a hitelfelvételhez hasonlóan – befektetési konstrukcióból is nagyon sok fajta létezik, s nekünk – a különböző lehetőségek alapos tanulmányozása után – a számunkra legmegfelelőbbet kell kiválasztanunk, hogy a lehető legnagyobb haszonra tehessünk szert. Tipikus példa erre az ún. lakás előtakarékossági hitel. A következő feladatban erre mutatunk egy leegyszerűsített példát.

3. példa A Kiss család 2002-ben, év elején elhelyezett a bankban 200 000 Ft-t 6,5%-os kamatos kamatra. Ezt követően minden évben (év elején, a kamatjóváírást követően) hozzátettek meglevő pénzükhöz 50 000 Ft-ot. Mekkora összeget vehettek fel 2011 év elején?

Megoldás

A könnyebb áttekinthetőség kedvéért jelöljük a kiindulási 200 000 Ft-t A-val, a rendszeresen hozzátett 50 000 Ft-ot B-vel.

2003 elején meglevő összeg: $A \cdot 1{,}065 + B$.

2004 elején meglevő összeg az előző év elején meglevő összeg 1,065-szöröse $+ B$, azaz $A \cdot 1{,}065^2 + B \cdot 1{,}065 + B$.

2005 elején meglevő összeg az előző év elején meglevő összeg 1,065-szöröse $+ B$, azaz $A \cdot 1{,}065^3 + B \cdot 1{,}065^2 + B \cdot 1{,}065 + B$.

A gondolatmenet most már világos: 2010 év elején meglevő összeg:
$A \cdot 1{,}065^8 + B \cdot 1{,}065^7 + B \cdot 1{,}065^6 + B \cdot 1{,}065^5 + \ldots + B \cdot 1{,}065 + B$.

Végül 2011 év elejére ez az összeg szorzódik még 1,065-tel. Tehát a 2011 év elején felvehető összeg:
$A \cdot 1{,}065^9 + B \cdot 1{,}065^8 + B \cdot 1{,}065^7 + B \cdot 1{,}065^6 + \ldots + B \cdot 1{,}065^2 + B \cdot 1{,}065$.

Az összeg utolsó 8 db tagja egy mértani sorozat 8 tagjának összege. A sorozat első tagja $B \cdot 1{,}065$, hányadosa 1,065, tehát a mértani sorozat összegképletét használva azt kapjuk, hogy

$$A \cdot 1{,}065^9 + B \cdot 1{,}065 \cdot \frac{1{,}065^8 - 1}{1{,}065 - 1} \approx A \cdot 1{,}76257 + B \cdot 10{,}73185.$$

Behelyettesítve A és B értékét, azt kapjuk, hogy a 2011 év elején felvehető összeg:
$200\,000 \cdot 1{,}76257 + 50\,000 \cdot 10{,}73185 \approx 889\,107$ (Ft).

4. példa Egy család lakásvásárláshoz 6 millió Ft kedvezményes hitelt vett fel egy banktól évi 7%-os kamatra valamely év január elején 15 évi futamidőre. Ezt a kölcsönt minden év végén egyenlő összegekkel szeretnék visszafizetni. Mennyi lesz az évente fizetendő törlesztőrészlet?

Megoldás

Jelöljük A-val a 6 millió Ft-ot, x-szel az évenkénti törlesztőrészletet és írjuk fel – mint az előző feladatban is – az első néhány év végén visszafizetendő részletet! Az első év végén a tartozás az A összeg plusz annak 7%-a; melyből visszafizették az első részletet, azaz x Ft-ot. Tehát

1. év végén a tartozás: $A \cdot 1{,}07 - x$.

A második év végén a tartozás: az $(A \cdot 1{,}07 - x)$ összeg plusz annak 1,07%-a, melyből visszafizették a második részletet, azaz x Ft-ot, tehát

2. év végén a tartozás: $(A \cdot 1{,}07 - x) \cdot 1{,}07 - x = A \cdot 1{,}07^2 - 1{,}07x - x$.

3. év végén a tartozás: $(A \cdot 1{,}07^2 - 1{,}07x - x) \cdot 1{,}07 - x = A \cdot 1{,}07^3 - 1{,}07^2x - 1{,}07x - x$.

4. év végén a tartozás:

$(A \cdot 1{,}07^3 - 1{,}07^2x - 1{,}07x - x) \cdot 1{,}07 - x = A \cdot 1{,}07^4 - 1{,}07^3x - 1{,}07^2x - 1{,}07x - x$.

A folytatás már jól látható: A 15. év végén a tartozás

$A \cdot 1{,}07^{15} - 1{,}07^{14}x - 1{,}07^{13}x - 1{,}07^{12}x - 1{,}07^{11}x - \ldots - 1{,}07x - x$.

Mivel a 15. év végén elfogy a törlesztés, így ennek az összegnek 0-nak kell lennie:

$A \cdot 1{,}07^{15} - 1{,}07^{14}x - 1{,}07^{13}x - 1{,}07^{12}x - 1{,}07^{11}x - \ldots - 1{,}07x - x = 0$.

Ezt az összeget így is írhatjuk:

$A \cdot 1{,}07^{15} - x(1{,}07^{14} + 1{,}07^{13} + 1{,}07^{12} + 1{,}07^{11} + \ldots + 1{,}07 + 1) = 0$.

A zárójelben egy mértani sorozat első 15 tagjának összege szerepel; a sorozat első tagja 1, hányadosa 1,07, így a következőt kapjuk:

$$A \cdot 1{,}07^{15} - x \cdot \frac{1{,}07^{15} - 1}{1{,}07 - 1} = 0, \qquad \text{azaz} \qquad x \cdot \frac{1{,}07^{15} - 1}{1{,}07 - 1} = A \cdot 1{,}07^{15},$$

$$x = \frac{A \cdot 1{,}07^{15} \cdot 0{,}07}{1{,}07^{15} - 1} \approx A \cdot 0{,}109795 = 6\,000\,000 \cdot 0{,}109795 = 658\,770.$$

Tehát ilyen feltételek mellett az évenkénti törlesztőrészlet 658 770 Ft.

Természetesen a gondolatmenet nem csak banki számításoknál alkalmazható, hanem minden olyan esetben, amikor egy mennyiség bizonyos időszakonként minden alkalommal ugyanolyan arányban (tehát ugyanannyi százalékkal) növekszik vagy csökken.

5. példa Egy dél-afrikai őserdő faállománya – az intenzív fakitermelés miatt – évente 1,4%-kal csökken. Hány év múlva csökken az erdő faállománya a felére?

Megoldás

Legyen az erdő faállománya: A_0.

Egy év múlva a faállomány: $A_0 \cdot 0{,}986$.

Két év múlva a faállomány: $A_0 \cdot 0{,}986^2$.

n év múlva a faállomány: $A_0 \cdot 0{,}986^n$.

Ha a faállomány n év múlva a felére csökkent, akkor

$$A_0 \cdot 0{,}986^n = \frac{A_0}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad 0{,}986^n = 0{,}5.$$

Használjuk ismét a logaritmust:

$$\lg(0{,}986)^n = \lg 0{,}5, \qquad \text{azaz} \qquad n \cdot \lg 0{,}986 = \lg 0{,}5,$$

$$n = \frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}986} \approx 49{,}16.$$

Ha tehát a fakitermelés intenzitása változatlan marad, akkor kb. az 50. év elején csökken az erdő faállománya a felére.

Feladatok

1. K1 Egy lengyelországi bölényrezervátumban 466 bölényt tartanak nyilván, melyek szaporulata 2,14% évente. Hány bölény lesz a rezervátumban 15 év múlva?

2. K1 Valamely év elején 5 évre lekötöttünk a bankban 1 600 000 Ft-ot. Az ötödik év végén 2 460 000 Ft-ot vehettünk fel. Hány százalékos volt a kamat?

3. K2 Az *A* üzem termelése a *B* üzem termelésének másfélszerese. Az *A* üzem évente 3,5%-kal, a *B* üzem évente 5,2%-kal növeli termelését. Hány év múlva lesz a két üzem termelése azonos?

4. K2 Egy kémiai laboratórium egy üvegtárolójában $4 \cdot 10^4$ baktériumot tárolnak, mely hetente p%-kal szaporodik. Az üvegtárolóban kb. 10^8 baktériumnak van hely. Az üvegtároló 32 hét alatt megtelt. Határozzuk meg p értékét!

5. K2 Lekötöttünk 8 évre egy bizonyos összeget 7,5%-os kamatra. A futamidő végén 356 695 Ft-t vehettünk fel. Mekkora volt a lekötött összeg?

6. K2 Egy kedvező kamatozású államkötvényt vásároltunk, melynek értéke 7 év alatt a duplájára nőtt. Hány százalékos az éves kamata ennek a kötvénynek?

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1107., 1109., 1110., 1112., 1117., 1120., 1121., 1124., 1131.

7. E1 20 000 000 Ft-os, évi 8%-ra felvett kölcsönt 18 év alatt kell visszafizetnünk, minden év végén egyenlő törlesztőrészletekkel. Mennyi lesz az éves törlesztőrészlet?

8. K2 Kovács úr fiának 6. születésnapján 200 000 Ft-ot helyezett el a bankba évi 5,5%-os kamatra. Ezt követően a fiú minden születésnapján újabb 30 000 Ft-ot tett az összeghez. Mennyi pénz lesz a számláján a fiú 18. születésnapján?