

**ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2015. május 5.**

# **MATEMATIKA**

## **EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA**

### **JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ**

**EMBERI ERŐFORRÁSOK  
MINISZTERIUMA**

---

---

## Fontos tudnivalók

### Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket**.
  - helyes lépés: *kipipálás*
  - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
  - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
  - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott vagy áthúzott kipipálás*
  - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
  - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

### Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

- 
6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
  7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészeire előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
  8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
  9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
  10. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
  11. **Valószínűsége** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
  12. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
  13. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

**Figyelem!** Az útmutató elején olvasható **Fontos tudnivalók** című rész lényegesen megváltozott. Kérjük, hogy a javítás megkezdése előtt figyelmesen tanulmányozza!

## I.

<b>1. a)</b>		
$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ helyettesítése.	1 pont	
Nullára rendezve: $\sin^2 x + \sin x = 0$ .	1 pont	
Szorzáttá alakítás után: $\sin x \cdot (\sin x + 1) = 0$ .	1 pont	<i>A <math>\sin x</math>-ben másodfokú egyenlet megoldóképletének helyes felírása.</i>
$\sin x = 0$ pontosan akkor, ha $x = k \cdot \pi$ , $k \in \mathbf{Z}$ .	1 pont*	
$\sin x = -1$ pontosan akkor, ha $x = \frac{3\pi}{2} + l \cdot 2\pi$ , $l \in \mathbf{Z}$ .	1 pont*	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont	<i>A behelyettesítés elfogadható egy <math>2\pi</math> hosszúságú perióduson belül is.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

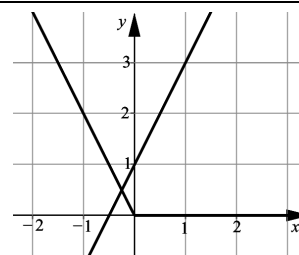
*Megjegyzés:*

*Ha a vizsgázó a következő hibák közül egyet követ el, akkor a \*-gal jelölt 2 pontból 1 pontot, ha egynél többet hibázik, akkor 0 pontot kapjon: a periódusokat leghagyja; fokban oldja meg az egyenletet; fokban és radiánban (vegyesen) dolgozik; sehol nem említi, hogy  $k \in \mathbf{Z}$ .*

<b>1. b)</b>		
Ha $x \geq 0$ , akkor $ x  = x$ .	1 pont	
Ekkor $0 = 2x + 1$ , ahonnan $x = -\frac{1}{2}$ ,	1 pont	
de ez $x \geq 0$ miatt nem megoldás.	1 pont	<i>Ez a pont jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel szűri ki a hamis gyököt.</i>
Ha $x < 0$ , akkor $ x  = -x$ ,	1 pont	
és az egyenlet: $ 2x  = 2x + 1$ .	1 pont	
(Mivel $x < 0$ , ezért) $-2x = 2x + 1$ , azaz $x = -\frac{1}{4}$ .	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy (az $x < 0$ feltétel teljesülésének említése mellett) ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	

*Megjegyzés: Grafikus megoldás esetén az  $x \mapsto |x - |x||$  ábrázolása*

*( $x \mapsto -2x$ , ha  $x \leq 0$  és  $x \mapsto 0$ , ha  $x > 0$ ) 4 pont, az  $x \mapsto 2x + 1$  ábrázolása 1 pont. Metszéspont leolvasása 1 pont. Ellenőrzés behelyettesítéssel 1 pont.*



<b>2. a) első megoldás</b>		
A képernyő oldalainak hosszát (cm-ben) jelölje $16x$ és $9x$ .	1 pont	
$40 \text{ col} = 101,6 \text{ cm}$	1 pont	
(A Pitagorasz-tétel szerint:) $(16x)^2 + (9x)^2 = 101,6^2$ .	1 pont	
$337x^2 = 10\,322,56$	1 pont	
Ebből (mivel $x > 0$ ) $x \approx 5,535$ (cm).	1 pont	
A képernyő oldalainak hossza tehát $(16x \approx) 88,6$ cm és $(9x \approx) 49,8$ cm.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>2. a) második megoldás</b>		
A képernyő oldalainak hosszát (col-ban) jelölje $16x$ és $9x$ .	1 pont	
(A Pitagorasz-tétel szerint:) $(16x)^2 + (9x)^2 = 40^2$ .	1 pont	
$337x^2 = 1600$	1 pont	
Ebből (mivel $x > 0$ ) $x \approx 2,179$ (col).	1 pont	
A képernyő oldalainak hossza tehát $(16x \approx) 34,863$ (col) és $(9x \approx) 19,610$ (col), azaz $88,6$ cm és $49,8$ cm.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

*Megjegyzés: Más, ésszerű és helyes kerekítésekkel kapott részeredményekből származó (egy tizedesjegyre helyesen kerekített) válasz is elfogadható. Ha a vizsgázó válaszában nem kerekít, vagy rosszul kerekít, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.*

<b>2. b) első megoldás</b>		
Az első képernyő területe a második területének 1,69-szerese.	1 pont	
A két (téglalap alakú) képernyő hasonló, ezért	1 pont	
a területük aránya a hasonlóságuk arányának négyzetével egyenlő.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A képernyők hasonlóságának (és így átlójuk hosszának) aránya $\sqrt{1,69} = 1,3$ .	1 pont	
Az első képernyő átlója 30%-kal nagyobb, mint a másodiké.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>2. b) második megoldás</b>		
Az első képernyő oldalainak hossza $16x$ , illetve $9x$ , a másodiké pedig $16y$ és $9y$ ( $x > 0$ és $y > 0$ ).	1 pont	
Az első képernyő területe $144x^2$ , a másodiké pedig $144y^2$ , tehát $144x^2 = 1,69 \cdot 144y^2$ .	1 pont	
Ebből $x = 1,3y$ .	1 pont	
Az első képernyő átlójának hossza $\sqrt{256x^2 + 81x^2} = x \cdot \sqrt{337}$ , a másodiké pedig $\sqrt{256y^2 + 81y^2} = y \cdot \sqrt{337}$ .	1 pont	<i>A két képernyő hasonló, ezért az átlóik aránya megegyezik egy megfelelő oldalpárjuk arányával, ami <math>\frac{x}{y} = 1,3</math>.</i>
Mivel $x = 1,3y$ , az első képernyő átlója 30%-kal nagyobb, mint a másodiké.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó a feladatot úgy oldja meg, hogy a két képernyő területének konkrét értékeket ad, és nem említi, hogy ez nem megy az általánosság rovására, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.*

<b>3. a)</b>		
A kerekített bevételek összege $7 \cdot 120 = 840$ (millió Ft).	1 pont	
A medián 120 millió forint, és két 120 millió forintos árbevétel volt, ezért legfeljebb három 120 millió forintnál kisebb bevétel lehet.	1 pont	<i>Ha a vizsgázó (indoklás nélkül) helyesen felsorolja a kerekített bevételeket, akkor ezért ebből a 3 pontból 1 pont jár.</i>
Mivel a módusz 100 millió forint, ezért három 100 millió forintos árbevétel volt.	1 pont	
A 160 millió Ft-os árbevétel figyelembevételével a hetedik árbevétel ( $840 - 3 \cdot 100 - 2 \cdot 120 - 160 =$ ) $= 140$ millió forintnak adódik.	1 pont	
A (kerekített) bevételek szórása: $\sqrt{\frac{3 \cdot (100 - 120)^2 + 2 \cdot (120 - 120)^2 + (140 - 120)^2 + (160 - 120)^2}{7}} \approx$	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó nem részletezi a számolás menetét, de számológéppel számolva jó eredményt kap.</i>
$\approx 21,4$ millió (Ft).	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>3. b) első megoldás</b>		
A rendes eladási ár árengedmény nélkül ( $54 + 9 =$ ) 63 millió Ft lett volna.	1 pont	
Tehát az eladott áru beszerzési értéke $\frac{63}{1,8} = 35$ millió Ft,	2 pont	
az árnyereség pedig ( $54 - 35 =$ ) 19 millió Ft volt.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>3. b) második megoldás</b>		
A rendes eladási ár a beszerzési érték $\frac{9}{5}$ -szöröse, a kedvezményes eladási ár pedig a $\frac{9}{10}$ -szerese.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A rendes eladási árnak $\frac{5}{9}$ része a beszerzési érték, ezért a rendes eladási árból befolyt összeg $\frac{4}{9}$ része (ár)nyereség;	1 pont	
a kedvezményes eladási árnak $\frac{10}{9}$ -szerese a kedvez- ményesen eladott áru beszerzési értéke, ezért a ked- vezményes eladásból befolyt összeg $\frac{1}{9}$ része (ár)veszteség.	1 pont	
Az árnyereség $\left(\frac{4}{9} \cdot 45 - \frac{1}{9} \cdot 9 =\right)$ 19 millió Ft volt.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>3. b) harmadik megoldás</b>		
A nem akciós időszakban eladott áru után 45 millió forint árbevétel keletkezett, az áru beszerzési értéke $\left(\frac{45}{1,8} =\right)$ 25 millió forint volt.	1 pont	
A 9 milliós árbevételhez $\left(\frac{9}{0,9} =\right)$ 10 millió forint be- szerzési érték tartozik.	1 pont	
A beszerzési érték összesen 35 millió forint,	1 pont	
az árnyereség pedig $(54 - 35 =)$ 19 millió forint volt.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó csak 10 000 forintos beszerzési értékű termékekkel dolgozik, és nem említi, hogy ez nem megy az általánosság rovására, akkor emiatt 1 pontot veszítsen.*

<b>3. c)</b>		
Megmaradt 1 darab M-es, 2 darab L-es és 4 darab XL-es zakó.	1 pont	
Ezek lehetséges sorrendjeinek száma $\frac{7!}{2! \cdot 4!} =$	1 pont	$\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{4}$
$= 105.$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>4. a) első megoldás</b>		
$ AB  = \sqrt{324 + 36} = \sqrt{360}$ $ AC  = \sqrt{676 + 64} = \sqrt{740}$ $ BC  = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68}$	2 pont	<i>Egy hiba esetén 1 pont jár, két hiba esetén nem jár pont.</i>
Koszinusztétellel: $740 = 360 + 68 - 2 \cdot \sqrt{360} \cdot \sqrt{68} \cdot \cos \beta$	2 pont	
$\cos \beta = \frac{-312}{2 \cdot \sqrt{360} \cdot \sqrt{68}} \approx -0,9971$	1 pont	
$\beta \approx 175,6^\circ$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

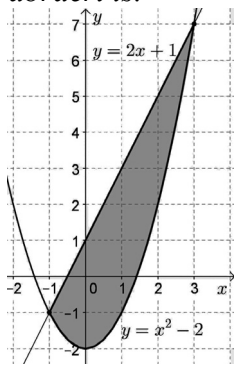
<b>4. a) második megoldás</b>		
$\vec{BA}(-18; 6), \vec{BC}(8; -2)$	1 pont	
$ \vec{BA}  = \sqrt{360}$ és $ \vec{BC}  = \sqrt{68}$	1 pont	
A $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ skaláris szorzatot írjuk fel kétféleképpen: $(-18) \cdot 8 + 6 \cdot (-2) = \sqrt{360} \cdot \sqrt{68} \cdot \cos \beta$	2 pont	
$\cos \beta = \frac{-156}{\sqrt{360} \cdot \sqrt{68}} \approx -0,9971$	1 pont	
$\beta \approx 175,6^\circ$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>4. b)</b>		
Az $ABC$ háromszög két (tetszőlegesen választott) oldalfelező merőlegesének metszéspontját kell megkeresnünk (ez a háromszög körülírt körének középpontja).	1 pont	<i>Ez a pont jár egy erre a gondolatra utaló jó ábráért is.</i>
$F_{AB}(-7; 7)$ és $\mathbf{n}_{f_{AB}} = \vec{AB}(18; -6)$	1 pont	
Az $AB$ szakasz felezőmerőlegesének egyenlete: $3x - y = -28$	1 pont	
$F_{BC}(6; 3)$ és $\mathbf{n}_{f_{BC}} = \vec{BC}(8; -2)$	1 pont	$F_{AC}(-3; 6)$ és $\mathbf{n}_{f_{AC}} = \vec{AC}(26; -8)$
A $BC$ szakasz felezőmerőlegesének egyenlete: $4x - y = 21$	1 pont	<i>Az <math>AC</math> szakasz felezőmerőlegesének egyenlete:</i> $13x - 4y = -63$
A két egyenes egyenletéből alkotott egyenletrendszer megoldása: $x = 49$ és $y = 175$ .	2 pont	
Tehát $K(49; 175)$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	



**II.**

<b>5. a)</b>		
$(2f + g)(x) = 2(2x + 1) + x^2 - 2 = x^2 + 4x$	1 pont	
$x(x + 4) = 0$	1 pont	
A $2f + g$ függvény zérushelyei a 0 és a $-4$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>5. b)</b>		
(A kérdéses területet integrálással számítjuk ki.) Az $f(x) = g(x)$ egyenlet megoldásai adják az integrálás határait.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A $2x + 1 = x^2 - 2$ egyenlet megoldásai $-1$ , illetve $3$ .	1 pont	
Mivel a $[-1; 3]$ zárt intervallumon $f(x) \geq g(x)$ (a metszéspontok első koordinátái által meghatározott intervallumon a $g$ grafikonja egy „felfelé nyíló” parabolaív, amely „felett” van az $f$ grafikonja),	1 pont	<i>Ez a pont jár egy megfelelő ábráért is.</i> 
ezért a kérdéses terület $\int_{-1}^3 (f(x) - g(x)) dx$ .	1 pont	
$\int_{-1}^3 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^3 ((2x + 1) - (x^2 - 2)) dx =$ $\int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx =$	1 pont	$\int_{-1}^3 (f(x) - g(x)) dx =$ $= \int_{-1}^3 f(x) dx - \int_{-1}^3 g(x) dx$
$= \left[ -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 =$	1 pont*	$\int_{-1}^3 (2x + 1) dx = [x^2 + x]_{-1}^3 =$ $= 12$ $\int_{-1}^3 (x^2 - 2) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - 2x \right]_{-1}^3 =$ $= \frac{4}{3}$
$= 9 - \left( -\frac{5}{3} \right) = \frac{32}{3} (\approx 10,67)$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	

*Megjegyzés: A \*-gal jelölt pont akkor is jár, ha a vizsgázó a határozott integrál értékét számológéppel helyesen határozza meg.*

<b>5. c)</b>		
(A $h(x)$ függvény a megadott intervallumon differenciálható.)	2 pont	
$h'(x) = \left( \frac{g(x)}{f(x)} \right)' = \left( \frac{x^2 - 2}{2x + 1} \right)' = \frac{2x(2x + 1) - (x^2 - 2) \cdot 2}{(2x + 1)^2} =$		
$= \frac{2x^2 + 2x + 4}{(2x + 1)^2} =$	1 pont	
$= \frac{2(x + 0,5)^2 + 3,5}{(2x + 1)^2}$	1 pont	<i>A <math>2x^2 + 2x + 4 = 0</math> egyenlet diszkriminánsa negatív (<math>-28</math>), továbbá a <math>2x^2 + 2x + 4</math> polinom főegyütthatója pozitív, ezért a polinom minden helyettesítési értéke pozitív..</i>
A tört számlálója és nevezője is pozitív (a $h$ értelmezési tartományán), így a tört értéke is pozitív.	1 pont	
Tehát a függvény valóban szigorúan monoton növekvő.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó függvény helyett csak sorozatra igazolja a monoton növekedést, akkor ezért nem jár pont.*

<b>6. a)</b>		
A 4 hibás és 6 ép tojás a sárga tojástartóba $\binom{4}{4} \cdot \binom{16}{6}$ (= 8008)-féleképpen kerülhet.	1 pont*	
Az összes eset száma: $\binom{20}{10}$ (= 184 756).	1 pont*	
Annak a valószínűsége, hogy mind a 4 hibás tojás a sárga dobozba kerül: $p = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{16}{6}}{\binom{20}{10}} (\approx 0,0433).$	1 pont*	
(Mivel a 4 hibás tojás a fehér tojástartóba is kerülhet, ezért) a kérdéses valószínűség ennek kétszerese, azaz közelítőleg 0,087.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

*Megjegyzések:*

1. A \*-gal jelölt 3 pontot akkor is megkaphatja a vizsgázó, ha annak a valószínűségét, hogy (például) a sárga tojástartóba kerülő mind a 10 tojás ép (és így mind a 4 hibás tojás a fehér tartóba kerül), a  $\frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \dots \cdot \frac{7}{11}$  szorzattal számítja ki.

2. Ha a vizsgázó rossz modellt használ (binomiális eloszlással számol), akkor legfeljebb 2 pontot kaphat. Ha jelzi, hogy az így kapott eredmény csak közelítő, akkor ezért további 1 pont jár.

<b>6. b) első megoldás</b>		
Annak a valószínűsége, hogy egy tojás ép: 0,98.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Annak a valószínűsége, hogy Csenge nem talál törött tojást a dobozban: $0,98^{10} (\approx 0,817)$ .	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy Csenge egy darab törött tojást talál a dobozban: $\binom{10}{1} \cdot 0,98^9 \cdot 0,02 (\approx 0,167)$ .	1 pont	
Így a kérdéses valószínűség: $p = 1 - 0,98^{10} - 10 \cdot 0,98^9 \cdot 0,02 \approx$	1 pont	
$\approx 0,016$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>6. b) második megoldás</b>		
Annak a valószínűsége, hogy egy tojás ép: 0,98.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Annak a valószínűsége, hogy Csenge 2 darab törött tojást talál a dobozban: $P(2) = \binom{10}{2} \cdot 0,98^8 \cdot 0,02^2 (\approx 0,0153)$ .	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy Csenge 3 darab törött tojást talál a dobozban: $P(3) = \binom{10}{3} \cdot 0,98^7 \cdot 0,02^3 (\approx 0,0008)$ .	1 pont	
A $P(4), P(5), \dots, P(10)$ valószínűségek, és ezek összege is már elhanyagolhatóan kicsi,	1 pont	
így a kérdéses valószínűség megközelítőleg $P(2) + P(3) \approx 0,016$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>6. c) első megoldás</b>		
Jelölje $A$ , illetve $B$ azt az eseményt, hogy a kiválasztott tojás az $A$ , illetve a $B$ beszállítótól származik, $E$ pedig azt az eseményt, hogy a kiválasztott tojás első osztályú. Ezekkel a jelölésekkel meghatározandó a $P(A E)$ valószínűség.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A feltételes valószínűség definíciója szerint $P(A E) = \frac{P(AE)}{P(E)}.$	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy az $A$ beszállítótól választottunk tojást, és az első osztályú: $P(AE) (= P(E A) \cdot P(A)) = 0,6 \cdot 0,6 (= 0,36).$	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy a $B$ beszállítótól választottunk tojást, és az első osztályú: $P(BE) (= P(E B) \cdot P(B)) = 0,3 \cdot 0,4 (= 0,12).$	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy a kiválasztott tojás első osztályú, az előző két valószínűség összege: $P(E) = 0,6 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 (= 0,48).$	1 pont	
Tehát $P(A E) = \frac{0,36}{0,48} = 0,75.$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>6. c) második megoldás</b>		
Az $A$ beszállítótól származó első osztályú tojások száma az összesnek 36%-a.	1 pont	
a $B$ beszállítótól származó első osztályú tojások száma az összesnek 12%-a.	1 pont	
Az összes beszállított tojásnak a 48%-a első osztályú.	1 pont	
Az első osztályú tojások $\left(\frac{0,36}{0,48} \cdot 100\% = \right)$ 75%-a származik az $A$ beszállítótól.	2 pont	
A kért valószínűség tehát 0,75.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

*Megjegyzés: A megoldás teljes értékű akkor is, ha a vizsgázó egy konkrét eset végigszámolása útján jut helyes eredményre, és utal arra, hogy a kapott valószínűség csupán az eloszlástól és nem az önkényesen választott darabszámtól függ.*

*Például: 1000 beszállított tojás közül (1 pont) 600 darab származik az  $A$  beszállítótól, és ezek között 360 darab első osztályú van (1 pont), 400 darab származik a  $B$  beszállítótól, és ezek között 120 darab első osztályú van (1 pont). Az összes tojás között tehát 480 első osztályú (1 pont), ezeknek a 75%-a (azaz 360 darab) származik az  $A$  beszállítótól. A kért valószínűség tehát  $(360 : 480 =)$  0,75 (1 pont). A kiszámított arányok nem függenek a konkrét darabszámtól, ezért az eredmény bármely esetben ugyanennyi (1 pont).*

<b>7. a)</b>		
A havi törlesztés összege (Ft-ban): $t_{72} = 1,6 \cdot 10^6 \cdot \frac{1,02^{72} \cdot 0,02}{1,02^{72} - 1} (\approx 42\,123).$	2 pont	
A 72 hónap alatt összesen $72 \cdot t_{72} (\approx 3\,032\,856)$ forintot fizetünk vissza,	1 pont	
ami ezer forintra kerekítve 3 033 000 Ft.	1 pont	<i>Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>7. b)</b>		
(Azt a legkisebb $n$ pozitív egész számot keressük, amelyre) $2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1,02^n \cdot 0,02}{1,02^n - 1} \leq 60\,000.$	2 pont	
(Mivel $1,02^n - 1 > 0$ , ezért) $0,02 \cdot 1,02^n \leq 0,03 \cdot (1,02^n - 1).$	1 pont	
$3 \leq 1,02^n$	1 pont	
Az 1,02 alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő,	1 pont	<i>A 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő,</i>
ezért $n \geq \log_{1,02} 3.$	1 pont	<i>ezért <math>\lg 3 \leq \lg 1,02^n</math>, vagyis <math>\lg 3 \leq n \cdot \lg 1,02.</math></i>
(A logaritmus azonosságát használva): $n \geq \frac{\lg 3}{\lg 1,02} \approx 55,48$	1 pont	$\lg 1,02 > 0$ miatt $n \geq \frac{\lg 3}{\lg 1,02} \approx 55,48,$
Tehát a törlesztőrészletek száma legalább 56 (azaz legalább 56 hónapos futamidőt kell választanunk).	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

*Megjegyzés: A 8 pont akkor is jár, ha a vizsgázó egyenletet ír fel egyenlőtlenség helyett, azt jól megoldja, és helyes következtetésre jut a törlesztőrészletek minimális számát illetően.*

<b>7. c)</b>		
A megadott számokkal $t_n = H \cdot (q-1) \cdot \frac{q^n}{q^n - 1} = 40\,000 \cdot \frac{1,02^n}{1,02^n - 1}.$	1 pont	$t_n = H \cdot (q-1) \cdot \frac{q^n}{q^n - 1} =$
Egyszerűsítés után: $t_n = 40\,000 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1,02^n}}.$	1 pont	$= H \cdot (q-1) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q^n}}$
Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1,02^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1,02} \right)^n = 0,$	1 pont	Mivel $q > 1$ , így $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q^n} = 0.$
ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 40\,000 \cdot \frac{1}{1-0} = 40\,000.$	1 pont	$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = H(q-1) = 40\,000$
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

*Megjegyzés: A vizsgázó 3 pontot kapjon az alábbi megoldásáért.*

*Megállapítja (tanult ismeretként), hogy a  $\{q^n\}$  sorozat határértéke plusz végtelen (1 pont).*

*Kijelenti, hogy „az  $\frac{a}{a-1}$  tört értéke az 1-hez tart, ha a számlálója a végtelenhez tart” (de ezt az állítását nem támasztja alá további érveléssel) (1 pont).*

*Fentiek alapján megállapítja, hogy a  $\{t_n\}$  sorozat határértéke  $H(q-1)$ , ami 40 000 (1 pont).*

<b>8. a)</b>		
Legyen a négyszög legkisebb szöge $\alpha$ fok, a sorozat differenciája pedig $d$ fok ( $d \geq 0$ ). Ekkor a négyszög szögei (valamilyen sorrendben) $\alpha, \alpha + d, \alpha + 2d$ és $\alpha + 3d$ fok nagyságúak.	1 pont	
A négyszög belső szögeinek összege $360^\circ$ , ezért $4\alpha + 6d = 360,$	1 pont	
vagyis $2\alpha + 3d = 180.$	1 pont	
$2\alpha + 3d = (\alpha + d) + (\alpha + 2d)$ , ami azt jelenti, hogy a négyszög két-két szögének összege $180^\circ$ .	1 pont	
Ha a két szög szomszédos, akkor a négyszög trapéz,	1 pont	
ha pedig szemközti, akkor húrnégyszög. Tehát az állítást igazoltuk.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>8. b)</b>		
A megfordítás: Ha egy négyszög trapéz vagy húrnégyszög, akkor a szögei (valamilyen sorrendben) egy számtani sorozat szomszédos tagjai.	1 pont	
A megfordítás hamis.	1 pont	
Egy megfelelő ellenpélda.	1 pont	<i>Például: egy trapéz, amelynek szögei <math>50^\circ, 70^\circ, 110^\circ</math> és <math>130^\circ</math> nagyságúak.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>8. c) első megoldás</b>		
A négy kiválasztott pálcikából pontosan akkor készíthető érintőnégyyszög, ha a két-két szemközti pálcika hosszának összege egyenlő.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Először válasszuk ki a legrövidebb pálcikát, amelynek a hossza $a$ cm, a (konvex négyszögben) vele szemben elhelyezni kívánt pálcika hossza pedig legyen $c$ cm.	1 pont	
A készlet négy pálcikájából pontosan akkor építhető 24 cm kerületű érintőnégyyszög, ha $a + c = 12$ (cm).	1 pont	
A 12-t hatféleképpen lehet két pozitív egész szám összegére felbontani: $1 + 11 = 2 + 10 = 3 + 9 = 4 + 8 = 5 + 7 = 6 + 6$ .	1 pont	
Ha $a = 1$ , akkor $c = 11$ , a másik két pálcika hosszának megválasztására pedig 6 különböző lehetőség van (1 és 11, vagy 2 és 10, vagy 3 és 9, vagy 4 és 8, vagy 5 és 7, vagy 6 és 6 cm).	1 pont	
Hasonlóan továbbhaladva kapjuk, hogy ha $a = 2$ , akkor 5, ha $a = 3$ , akkor 4, ha $a = 4$ , akkor 3, ha $a = 5$ , akkor 2, és végül, ha $a = 6$ , akkor 1 lehetőség van.	1 pont	
Az összes különböző lehetőségek száma tehát $(6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 21$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	

<b>8. c) második megoldás</b>		
A négy kiválasztott pálcikából pontosan akkor készíthető érintőnégyyszög, ha a két-két szemközti pálcika hosszának összege egyenlő.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A készlet négy pálcikájából tehát pontosan akkor építhető 24 cm kerületű érintőnégyyszög, ha a négyszögben egymással szemben elhelyezkedő két-két oldal (centiméterben mért) hossza az (1; 11), (2; 10), (3; 9), (4; 8), (5; 7), (6; 6) számpárok valamelyike.	2 pont	
Annyiféleképpen választható ki négy megfelelő pálcika a készletből, ahányféleképpen a hat számpárból kettő – sorrendre való tekintet nélkül – kiválasztható úgy, hogy egy számpárt kétszer is választhatunk.	1 pont	
Ez a szám 6 különböző objektum másodosztályú ismétléses kombinációinak számával egyezik meg.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Az összes különböző lehetőségek száma tehát $\binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} =$	1 pont	
$= 21$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó szisztematikusan felsorolja a 21 különböző lehetőséget, akkor ezért teljes pontszámot kapjon.*

<b>9. a) első megoldás</b>		
Ha a kocka éle $a$ , a gömb sugara pedig $r$ , akkor $6a^2 = 4r^2\pi$ .	1 pont	
Ebből $r = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} a$ .	1 pont	$a = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} r$
A gömb térfogata $\frac{4\pi}{3} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{2\pi}} a\right)^3 =$	1 pont	$V_{kocka} = \sqrt{\frac{8\pi^3}{27}} r^3$ .
$= \sqrt{\frac{6}{\pi}} \cdot a^3$ (ahol $a^3$ a kocka térfogata).	1 pont	(Mivel a gömb térfogata $\frac{4\pi}{3} r^3$ , így) azt kell belát- ni, hogy $\frac{4\pi}{3} > \sqrt{\frac{8\pi^3}{27}}$ .
Mivel $\sqrt{\frac{6}{\pi}} > 1$ ,	1 pont	Ezzel ekvivalens $2 > \frac{\pi}{3}$ , ami igaz.
ezért a gömb térfogata valóban nagyobb a kocka tér- fogatánál.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>9. a) második megoldás</b>		
Ha a két test felszíne egyaránt $A$ , akkor $V_{kocka}^2 = \frac{A^3}{6^3}$ ,	2 pont	
$V_{gömb}^2 = \frac{A^3}{36\pi}$	2 pont	
Mivel $36\pi < 6^3$ ,	1 pont	
ezért a gömb térfogata valóban nagyobb a kocka tér- fogatánál.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

*Megjegyzések:*

1. Ha a vizsgázó egy konkrét felszínű gömb és a vele megegyező felszínű kocka térfogatát hasonlítja össze, akkor ezért legfeljebb 2 pontot kaphat.
2. A vizsgázó teljes pontszámot kap, ha ismerteti a vonatkozó izoperimetrikus problémát vagy annak egy szűkített változatát (például: adott felszínű konvex testek között a gömb térfogata a legnagyobb), majd ennek speciális eseteként bizonyítottnak tekinti az állítást.



<b>9. b)</b>		
Az összeolvasztással kapott kocka térfogata $p^3 + q^3$ , ezért élének hossza $\sqrt[3]{p^3 + q^3}$ ,	1 pont	
felszíne tehát $6 \cdot \left(\sqrt[3]{p^3 + q^3}\right)^2$ , ami valóban $6 \cdot \sqrt[3]{(p^3 + q^3)^2}$ -nel egyenlő.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>9. c)</b>		
A bizonyítandó állítás: $6 \cdot \sqrt[3]{(p^3 + q^3)^2} < 6 \cdot (p^2 + q^2)$	1 pont	
Mindkét oldalt 6-tal osztva és köbre emelve (az $x^3$ függvény szigorú monotonitása miatt): $(p^3 + q^3)^2 < (p^2 + q^2)^3$ .	1 pont	
Elvégezve a hatványozásokat: $p^6 + 2p^3q^3 + q^6 < p^6 + 3p^4q^2 + 3p^2q^4 + q^6$ .	2 pont	
Rendezve és a pozitív $p^2q^2$ szorzattal osztva: $0 < 3p^2 + 3q^2 - 2pq$ .	1 pont*	
$0 < 2p^2 + 2q^2 + (p - q)^2$ ,	1 pont*	$0 < 3(p - q)^2 + 4pq$ ,
ez pedig mindig igaz (hiszen a jobb oldalon két pozitív és egy nemnegatív szám összege áll).	1 pont*	<i>ez pedig mindig igaz (hiszen a jobb oldalon egy nemnegatív és egy pozitív szám összege áll).</i>
Mivel minden átalakítás ekvivalens volt, ezért a bizonyítandó állítás is igaz.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

*Megjegyzések:*

1. Ha a vizsgázó egy konkrét  $(p; q)$  esetén ellenőrzi az állítás teljesülését, akkor ezért 1 pontot kaphat.

2. A \*-gal jelölt 3 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:

(Rendezve és a pozitív $p^3q^3$ szorzattal osztva:)		
$2 < 3 \left( \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right)$	1 pont	
ez pedig mindig igaz (hiszen egy pozitív számnak és reciprokának az összege legalább 2).	2 pont	