M0

OKTATÁSI MINISZTÉRIUM

KÖZÉPISKOLA
2005. május

Elbírálási útmutató a matematika érettségi vizsgához

1. (**1260.**) Az egyik olajtartályunk térfogata kétszerese a másikénak. A vásárolt olaj $\frac{1}{3}$ része már nem fér a kisebbik tartályba, ha pedig a nagyobbik tartályba öntjük a vásárolt olajat, még további 50 liter férne bele. Hány liter olajat vásároltak és mekkorák a tartályok?

Megoldás:

Jelöljük a kisebbik tartály térfogatát x-szel, a vásárolt olaj mennyiségét y-nal. 1 pont

A következő táblázatba foglalhatjuk az információkat:

	a tartály térfogata (liter)	a tartályba férő olaj mennyisége (liter)
kisebbik tartály	x	$y-\frac{1}{3}y$
nagyobbik tartály	$2x$	$y+50$

Ebből a következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$x = y - \frac{1}{3}y,$$
$$2x = y + 50.$$ 3 pont

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása:

$$x = 100,$$
$$y = 150.$$ 3 pont

A kapott eredmény a szövegnek megfelel:

– mert ha a kisebbik tartály térfogata 100 l, akkor 150 l – 100 l = 50 l olaj kimarad, ha ebbe töltjük,

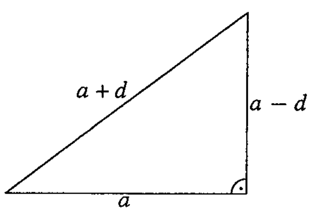
– továbbá ha a nagyobbik tartály térfogata 2 · 100 l = 200 l, akkor abba 150 l olajat öntve, még 50 l-nyi hely üresen marad. 2 pont

Tehát: a kisebbik tartály térfogata 100 l, a nagyobbiké 200 l, a vásárolt olaj mennyisége 150 l. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. (**3540.**) Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő tagjai. A háromszög területe 150 cm^2. Mekkorák e háromszög oldalai?

Megoldás:



Mivel a háromszög oldalai egy számtani sorozat egymás utáni tagjai, ezért jelölhetjük az oldalak hosszát $a - d$; a; $a + d$-vel (mégpedig az $a + d$ az átfogó, feltéve, hogy $d > 0$). 2 pont

A háromszög derékszögű, ezért a Pitagorasz-tétel szerint oldalaira áll:

$$a^2 + (a - d)^2 = (a + d)^2.$$ 1 pont

Ezt rendezve kapjuk, hogy

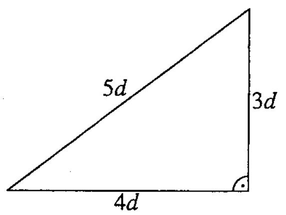
(1) $$a^2 = 4ad.$$ 2 pont

Tudjuk, hogy $a \neq 0$ (mivel az egyik oldal hossza), ezért (1)-ből

$$a = 4d.$$ 2 pont

Így a háromszög oldalai:

$$a - d = 4d - d = 3d;$$
$$a = 4d;$$
$$a + d = 4d + d = 5d.$$ 1 pont



Másrészt a derékszögű háromszög területe a befogók szorzatának a fele:

$$\frac{3d \cdot 4d}{2} = 150,$$

amiből

$$d = +5$$ 2 pont

(tudjuk, hogy $d > 0$ kell legyen).

Tehát a háromszög oldalainak hossza:

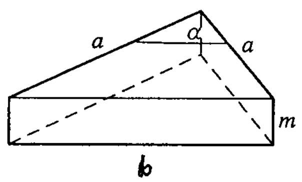
15 cm; 20 cm; 25 cm. 1 pont

Ezek minden feltételt teljesítenek:
- számtani sorozatot alkotnak: $20 - 15 = 25 - 20$,
- érvényes rájuk a Pitagorasz-tétel: $15^2 + 20^2 = 25^2$,
- a háromszög területe $\frac{15 \cdot 20}{2} = 150 \text{ cm}^2$. 1 pont

Összesen: 12 pont

3. **(2710.)** Egy háromoldalú egyenes hasáb alaplapja olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek szárai 5,6 cm hosszúságúak és $102°45'$ szöget zárnak be egymással. Mekkora a hasáb térfogata, ha a palástjának a felszíne ugyanakkora, mint az alaplapok területének összege?

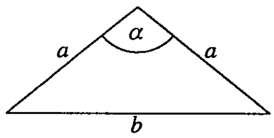
Megoldás:



A hasáb térfogata

$$V = T \cdot m,$$

tehát meg kell határoznunk T-t és m-et. 1 pont



Az alaplap területe

$$T = \frac{a^2 \sin\alpha}{2},$$

$$T = \frac{5{,}6^2 \sin 102{,}75°}{2},$$

(1) $$T \approx 15{,}29 \text{ cm}^2.$$ 2 pont

A két alap egybevágó, tehát egyenlő területű, ezért a P-re megadott feltétel

$$P = 2T,$$

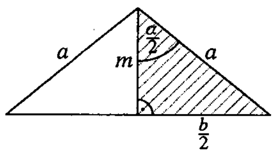
amibe (1)-et beírva

(2) $$P \approx 30{,}58 \text{ cm}^2.$$ 1 pont

Másrészt a palástot három téglalap alkotja, így:

(3) $$P = bm + 2(am).$$ 1 pont

Ha b-t ismernénk, akkor m-et kiszámíthatnánk ebből. Ezért b-t határozzuk meg az alapháromszögből:



A b-hez tartozó magasság derékszögű háromszöget hozott létre, és ebben

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{b}{2}}{a},$$

$$\sin 51{,}375° = \frac{\frac{b}{2}}{5{,}6},$$

(4) $$b \approx 8{,}75 \text{ cm}.$$ 3 pont

Ezután (2), (3) és (4) figyelembevételével

$$30{,}58 = 8{,}75m + 2 \cdot 5{,}6m,$$

azaz

(5) $$m \approx 1{,}53 \text{ cm}.$$ 3 pont

A térfogatképletbe beírva (1)-et és (5)-öt

$$V \approx 15{,}29 \cdot 1{,}53,$$

$$V \approx 23{,}44 \text{ cm}^3.$$

Tehát a térfogat 23,44 cm^3. 2 pont

Összesen: 13 pont

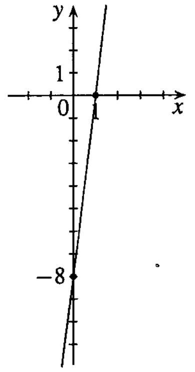
4. (1539.) Határozza meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy a

$$P(x) = (5-k)x^2 - 2(1-k)x + 2 - 2k$$

polinom bármely valós számhoz tartozó helyettesítési értékei negatív számok legyenek!

Megoldás:

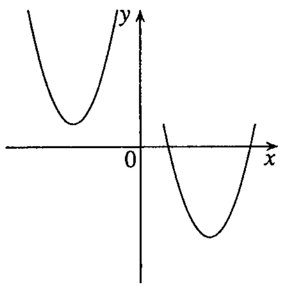
Tekintsük az $x \mapsto P(x)$ függvényt.



a) Ha $5 - k = 0$, azaz

$$k = 5,$$

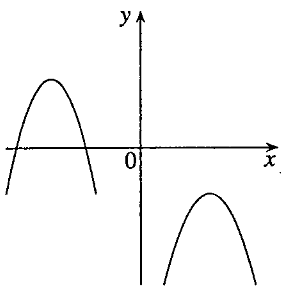
akkor a függvény elsőfokú, grafikonja az x tengelyt metsző egyenes, tehát a függvényértékek nem lehetnek minden x-re azonos előjelűek. 2 pont



b) Ha $5 - k > 0$, azaz

$$k < 5,$$

akkor a függvény grafikonja olyan parabola, amelynek minimuma van, és így az összes minimumnál nagyobb valós értéket felveszik a függvényértékek, tehát nem lehet minden értéke negatív. 2 pont



c) Ha $5 - k < 0$, azaz

(1) $$k > 5,$$

akkor a függvény képe maximummal rendelkező parabola, tehát értékei nem vesznek fel a maximumnál nagyobb értékeket. 1 pont

Ha minden helyettesítési érték negatív, akkor a parabolának nem lehet közös pontja az x tengellyel, vagyis a $P(x) = 0$ másodfokú egyenletnek nem lehet valós gyöke. 1 pont

Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy az egyenlet diszkriminánsa negatív legyen. 1 pont

Az

$$(5 - k)x^2 - 2(1 - k)x + 2 - 2k = 0$$

egyenlet diszkriminánsa: $D = 4(1 - k)^2 - 4(5 - k)(2 - 2k),$

egyszerűbb alakban: $D = 4(-k^2 + 10k - 9).$

Tehát meg kell oldanunk a $4(-k^2 + 10k - 9) < 0$

egyenlőtlenséget. 2 pont

Ehhez megkeressük a

$$-k^2 + 10k - 9 = 0$$

egyenlet gyökeit, amelyek

$$k_1 = 1,$$

és

$$k_2 = 9.$$ 2 pont

Az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha

(2) $$k < 1 \quad \text{vagy} \quad k > 9.$$ 2 pont

Az eredeti feladat megoldását azok az k értékek adják, amelyek (1)-nek és (2)-nek is eleget tesznek, ezek pedig a

$$k > 9$$

értékek. 2 pont

Összesen: 15 pont

5. (2536.) A valós számok halmazának mely legbővebb részhalmazán értelmezhető a

$$\sqrt{\cos^2 x - 1}$$

kifejezés.

Adja meg a kifejezés értékkészletét is!

Megoldás:

A négyzetgyök csak akkor értelmezett, ha

$$\cos^2 x - 1 \geq 0,$$

azaz

(1) $$\cos^2 x \geq 1.$$ 2 pont

A cos függvény tulajdonsága miatt

$$-1 \leq \cos x \leq 1,$$

és ezért

(2) $$0 \leq \cos^2 x \leq 1.$$ 2 pont

(1) és (2) egyszerre csak akkor teljesül, ha

$$\cos^2 x = 1,$$

vagyis

(3) $$\cos x = \pm 1.$$ 2 pont

(3)-ból x lehetséges értékei

$$x = k\pi \qquad (k \in \mathbf{Z}),$$

tehát a legbővebb halmaz, amin a kifejezés értelmezhető:

$$\{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$ 2 pont

Ezen x értékek mellett a kifejezés értéke

$$\sqrt{1-1} = 0,$$

vagyis értékkészlete a

$$\{0\}$$

egyelemű halmaz. 1 pont

Összesen: 9 pont

6. (**843.**) Oldja meg a következő egyenletet a pozitív számok halmazán!

$$x + |x - 5| = 7.$$

Megoldás:

Az abszolútérték definíciója alapján

$$|x - 5| = -x + 5, \qquad \text{ha } x < 5,$$

$$\text{és} \quad |x - 5| = x - 5, \qquad \text{ha } x \geq 5. \qquad \text{1 pont}$$

a) Az $x < 5$ feltétel mellett a megoldandó egyenlet:

$$x + (-x + 5) = 7. \qquad \text{1 pont}$$

Ebből

$$5 = 7$$

ellentmondásra jutunk, tehát $x < 5$ esetén nincs megoldása az eredeti egyenletnek. 2 pont

b) Az $x \geq 5$ feltétel mellett az

$$x + (x - 5) = 7 \qquad \text{1 pont}$$

egyenletet kapjuk, amiből

$$x = 6. \qquad \text{1 pont}$$

Ez valóban gyök, mert teljesíti a feltételt – nagyobb 5-nél –, továbbá benne van az alaphalmazban (pozitív). 2 pont

Ezt az ellenőrzés is igazolja:

$$6 + |6 - 5| = 6 + 1 = 7. \qquad \text{1* pont}$$

Tehát az egyenlet egyetlen megoldása

$$x = 6. \qquad \text{1 pont}$$

Összesen: 10 pont

Megjegyzés. Ha a vizsgázó az ellenőrzés helyett korrektül hivatkozik az ekvivalenciára, a * pontot akkor is kapja meg.

7. (**95.**) A p paraméterű $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ fókuszpontú parabola tengelypontja a koordináta-rendszer kezdőpontja, tengelye az ordinátatengely. Bizonyítsa be, hogy a parabola egyenlete $x^2 = 2py$!

Értékelés:

A hiánytalan bizonyításért 11 pont jár.

Ha a bizonyítás nem teljes, arányosan csökkentsük a pontszámot.

Összesen: 11 pont

É R T É K E L É S

Az elért pontszámokat a következőképpen váltjuk át osztályzatra:

0–17 pontig: elégtelen (1).

60 ponttól: jeles (5).

A jeles osztályzat alsó határától (60 pont) és az elégséges alsó határától (18 pont) alapos indokkal bizonyos esetekben legfeljebb $\pm$ 3 ponttal el lehet térni.

A közbülső osztályzatok a kialakult tanári gyakorlat alapján állapíthatók meg.

Az útmutatóban közölt megoldásoktól eltérő helyes megoldásra természetesen teljes pontszám jár, a részpontokat az egyes értékelhető részekre szintén arányosan kell megállapítani.

Ha az útmutató mást nem javasol, akkor egyszerű számolási hiba esetén azért a lépésért nem jár pont, amelyben a hibát elköveti a vizsgázó. A többi lépésért — amennyiben ezek helyes megoldás esetén is szerepelnek — a megfelelő részpontszámokat meg lehet adni.

Az elbírálási útmutatóban szereplő részpontszámok indokolt esetben tovább bonthatók. Minden feladatnak csak egy helyes megoldását értékeljük.

Ha a vizsgázó a dolgozat beadása előtt a feladat megoldásán változtat, akkor a változtatásnak egyértelműnek, világosnak kell lennie. A tanárnak az új, illetve nem áthúzott megoldást kell értékelnie.

A dolgozat végén a tanár tüntesse fel az egyes feladatokra adott pontszámokat és azok összegét, az annak megfelelő minősítést, majd mindezt lássa el aláírásával!