OKTATÁSI MINISZTÉRIUM

M/73

KÖZÉPISKOLA
2005. május

Elbírálási útmutató a matematika érettségi vizsgához

1. (**813.**) Mely valós számpárokra teljesül a következő egyenletrendszer?

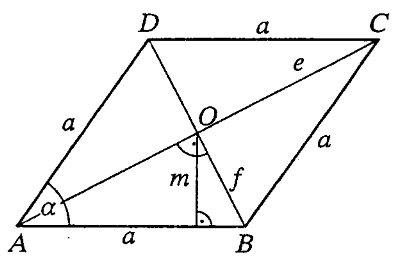
$$x^2 + y^2 = 34$$
$$x - y = 2$$

Megoldás:

A második egyenletből kifejezve, $x = 2 + y$.	1 pont
Az első egyenletbe behelyettesítve: $(2 + y)^2 + y^2 = 34$.	1 pont
Rendezés után a $2y^2 + 4y - 30 = 0$ egyenlethez jutunk,	1 pont
amelynek gyökei $y_1 = 3$; $y_2 = -5$.	2 pont
$y_1 = 3$ esetén $x_1 = 5$, valamint $y_2 = -5$ esetén $x_2 = -3$.	2 pont
Az egyenletrendszer megoldásai a valós számok halmazán az $(5; 3)$ és a $(-3; -5)$ rendezett számpárok.	1 pont
Ellenőrzés (vagy az ekvivalenciára való hivatkozás).	1 pont
Összesen:	9 pont

2. (**2611.**) Egy rombusz átlói 6 cm, illetve 8 cm hosszúságúak. Mekkorák a szögei, és mekkora a beírható kör sugara?

Megoldás:



Jó ábra	1 pont
A rombusz átlói merőlegesen felezik egymást, és az átlók felezik a szögeket.	1 pont
$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$	2 pont
$\frac{\alpha}{2} = 36,87^\circ$ vagyis $\alpha = 73,74^\circ$.	1 pont
$\beta = 180^\circ - 73,74^\circ = 106,26^\circ$.	1 pont
A beírt kör sugara az AOB háromszög magassága (m).	1 pont
Az AOB háromszög területének kétféle felírásából következik, hogy	1 pont
$\left(\frac{e}{2}\right)\left(\frac{f}{2}\right) = a \cdot m,$	1 pont
ahol $a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$	1 pont
azaz $3 \cdot 4 = 5 \cdot m,$	
amiből $m = \frac{12}{5}.$	1 pont
A beírt kör sugara $\frac{12}{5}$ cm.	1 pont
Összesen:	12 pont

3. (**3542.**) Egy számtani sorozat első 9 tagjának az összege 297, az első 6 tagjáé pedig 261. Határozza meg e sorozat első tagját és differenciáját!

<u>Megoldás:</u>

Az első 9 tagjának összegéből elvéve az első 6 tag összegét, $S_9 - S_6 = 36$-ot kapunk. 2 pont

Tehát $a_7 + a_8 + a_9 = 36$. 2 pont

A középső tag $a_8 = \frac{1}{3} \cdot 36 = 12$. 2 pont

Az első 9 tag összegéből megkapjuk az 5. helyen állót: $a_5 = \frac{1}{9} \cdot S_9 = 33$. 2 pont

A két tagból, illetve az $a_8 = a_5 + 3d$ összefüggésből következik, hogy $d = -7$. 2 pont

a_1 meghatározása az $a_5 = a_1 + 4d$ összefüggésből: $a_1 = 61$. 2 pont

A sorozat első tagja 61, a differenciája pedig -7. 1 pont

Ellenőrzés a tagok felsorolásával és összeadással. 1 pont

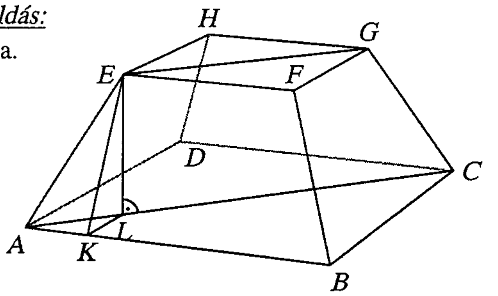
Összesen: 14 pont

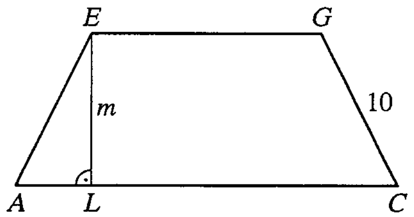
Megjegyzés. Ha a jelölt a_1 és d értékeit más egyenletrendszerből helyesen meghatározza, jár a megfelelő részpontszám.

4. (**2331.**) Négyzet alapú egyenes csonkagúla alapéle 7 cm, fedőéle 4 cm, oldalélei pedig 10 cm hosszúságúak. Mekkora a csonkagúla térfogata és felszíne?

<u>Megoldás:</u>

Jó ábra. 1 pont





A csonkagúla testmagasságát (m) az $ACGE$ síkmetszetből határozzuk meg. 2 pont

Ebben $AC = 7 \cdot \sqrt{2}$, illetve $EG = 4 \cdot \sqrt{2}$. 2 pont

$AL = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}$ 1 pont

$EL = \sqrt{10^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{95,5} \approx 9,77.$ 1 pont

A csonkagúla térfogata: $V = \frac{m}{3}(T + \sqrt{Tt} + t)$, ahol T az egyik, t a másik alaplap területe.

Az ismert adatok alapján:

$$V = \frac{\sqrt{95,5}}{3} \cdot (7^2 + 7 \cdot 4 + 4^2) \approx 302,94 \text{ (cm}^3\text{)}.$$ 2 pont

A felszín kiszámításához a lapmagasságot az ELK derékszögű háromszögből kapjuk meg, amelynek KL befogója 1,5 cm. 2 pont

Pitagorasz tételéből $KE = \sqrt{95,5 + 1,5^2} = \sqrt{97,75}$ (cm). 2 pont

A csonkagúla felszíne $A = T + t + 4t_{\text{trapéz}}$

$$A = 7^2 + 4^2 + 4 \cdot \frac{4+7}{2} \cdot \sqrt{97{,}75} \approx$$ 2 pont

$$\approx 282{,}51\ (\text{cm}^2).$$ 1 pont

Összesen: 16 pont

5. (**1077.**) Oldja meg a következő egyenletet a természetes számok halmazán!

$$\log_2 \log_3(x-1) = 1$$

Megoldás:

A logaritmus definíciója értelmében 1 pont

$$\log_3(x-1) = 2,$$ 3 pont

amiből $x - 1 = 9$ következik. 2 pont

Az egyenlet megoldása $x = 10$. 1 pont

A kapott megoldás természetes szám. 1 pont

Ellenőrzés vagy helyes feltételekkel való összevetés. 1 pont

Összesen: 9 pont

6. (**4052.**) Hány 5-tel osztható négyjegyű szám képezhető a 0, 1, 3, 5 számjegyek felhasználásával, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet? Számítsuk ki ezek összegét!

Megoldás:

Azok a számok oszthatók 5-tel, amelyek 0-ra vagy 5-re végződnek. 2 pont

Ezek száma $3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 10$. 2 pont

(*Megjegyzés:* bármilyen helyes számítás vagy leszámlálás esetén jár a 2 pont.)

A számok

1350; 1530; 3150; 3510; 5130; 5310; 1035; 1305; 3015; 3105. 3 pont

A számok összege 28440. 1 pont

Összesen: 8 pont

Megjegyzés. Ha a tanuló a képezhető számok felsorolása nélkül számolja ki (helyesen) a képezhető számok összegét, akkor is kapja meg az összeg kiszámításáért járó 3 + 1 pontot.

7. (**93.**) Bizonyítsa be, hogy a $C(u; v)$ középpontú, r sugarú kör egyenlete $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$!

Értékelés:

A helyes bizonyítás 12 pont

Hiányos bizonyítás esetén a pontszámot arányosan csökkentsük!

Összesen: 12 pont

ÉRTÉKELÉS

Az elért pontszámokat a következőképpen váltjuk át osztályzatra:

0–17 pontig: elégtelen (1).

60 ponttól: jeles (5).

A jeles osztályzat alsó határától (60 pont) és az elégséges alsó határától (18 pont) alapos indokkal bizonyos esetekben legfeljebb ± 3 ponttal el lehet térni.

A közbülső osztályzatok a kialakult tanári gyakorlat alapján állapíthatók meg.

Az útmutatóban közölt megoldásoktól eltérő helyes megoldásra természetesen teljes pontszám jár, a részpontokat az egyes értékelhető részekre szintén arányosan kell megállapítani.

Ha az útmutató mást nem javasol, akkor egyszerű számolási hiba esetén azért a lépésért nem jár pont, amelyben a hibát elköveti a vizsgázó. A többi lépésért — amennyiben ezek helyes megoldás esetén is szerepelnek — a megfelelő részpontszámokat meg lehet adni.

Az elbírálási útmutatóban szereplő részpontszámok indokolt esetben tovább bonthatók. Minden feladatnak csak egy helyes megoldását értékeljük.

Ha a vizsgázó a dolgozat beadása előtt a feladat megoldásán változtat, akkor a változtatásnak egyértelműnek, világosnak kell lennie. A tanárnak az új, illetve nem áthúzott megoldást kell értékelnie.

A dolgozat végén a tanár tüntesse fel az egyes feladatokra adott pontszámokat és azok összegét, az annak megfelelő minősítést, majd mindezt lássa el aláírásával!