Sokszínű matematika 12.

A KITŰZÖTT FELADATOK EREDMÉNYE

Logika, bizonyítási módszerek

1. Logikai feladatok, kijelentések

1. Feltéve, hogy a középső a kérdésre válaszolt: a középső lókötő, a harmadik lovag.
2. Aki ellopta az elefántot, mindig hazudik.
3. Piki.
4. Lovag plinket, lókötő plankot mond.
5. Kiss Kata, Szabó Réka, Nagy Sára, Varga Eszter.
6. Zoli: villamos, kosárlabda; Bálint: bicikli, kézilabda; Pisti: busz, úszás.

Rejtvény: Német.

2. Logikai műveletek – negáció, konjunkció, diszjunkció

1. Fehér dobozban: piros, zöld golyó. Piros dobozban: fehér, sárga golyó. Kék dobozban: sárga, piros golyó. Zöld dobozban: kék, fehér golyó. Sárga dobozban: zöld, kék golyó.
2. $\neg p$ = A négyzetnek van olyan szöge, amelyik nem derékszög.
   $\neg q$ = Van olyan háromszög, amelyik nem derékszögű.
   $\neg r$ = A szabályos ötszögnek van olyan szöge, amelyik derékszög.
   $\neg s$ = Nincs olyan deltoid, amelyik rombusz = Egyetlen deltoid sem rombusz.
   $\neg t$ = Minden trapéz paralelogramma.
   $\neg u$ = Nincs homorúszögű háromszög. = Minden háromszög nem homorúszögű.
   $\neg w$ = Van olyan háromszög, amely köré nem írható kör.
   $\neg A$ = A 3 nagyobb vagy egyenlő, mint π. $(3 \geq \pi)$
   $\neg B$ = A 4 kisebb, mint 5.
   $\neg C$ = Szabályos dobókockával dobhatunk 6-nál nagyobbat is.
   $\neg D$ = 9-nek 3-nál kevesebb osztója van.
   $\neg E$ = Minden másodfokú egyenletnek 3-nál kevesebb gyöke van.
3. $$\left.\begin{aligned} A &= \neg p \\ \neg\neg p &= p \end{aligned}\right\} \Rightarrow \neg A = p$$
   $\neg A$ = Minden faluban van posta.
   $\neg B$ = Van olyan ember, aki nem kékszemű.
   $\neg C$ = Van olyan pók, amelyiknek 8-nál több szeme van.
   $\neg D$ = A február sose 30 napos.
   $\neg E$ = Van olyan szálloda, amelyben van olyan szoba, ahol nincs telefon.
   $\neg F$ = Minden munkahely olyan, hogy senki sem dolgozik.

4. Mit szoktál mondani akkor, amikor valaki megkérdezi, hogy a „plink” az jelenti, hogy „igen”?

5. *a)* Piki igazmondó, Niki és Tiki hazug.
b) Tiki biztosan igazmondó, Niki hazug, Pikiről nem tudjuk.

6. *a)* $\neg H$ $\neg(\neg H)$ = Ma hétfő van.
b) $H \wedge F$ $\neg(H \wedge F)$ = Ma nem hétfő van, vagy nem vagyok fáradt. = $\neg H \vee \neg F$
c) $H \wedge \neg F$ $\neg(H \wedge \neg F)$ = Ma nem hétfő van, vagy fáradt vagyok. = $\neg H \vee F$
d) $\neg H \wedge F$ $\neg(\neg H \wedge F)$ = Ma hétfő van, vagy nem vagyok fáradt. = $H \vee \neg F$
e) $\neg H \wedge \neg F$ $\neg(\neg H \wedge \neg F)$ = Ma hétfő van, vagy fáradt vagyok.

7. *a)* $M \vee T$ hétfőn igaz
$\neg(M \vee T)$ = Ma nem hétfő van és tegnap nem vasárnap volt. = $\neg M \wedge \neg T$
b) $\neg M \vee \neg T$ csak hétfőn nem igaz
$\neg(\neg M \vee \neg T)$ = Ma hétfő van és tegnap vasárnap volt. = $M \wedge T$
c) $\neg T \vee M$ minden nap igaz
$\neg(\neg T \vee M)$ = Tegnap vasárnap volt és ma nincs hétfő. = $T \wedge \neg M$
d) $\neg M \vee \neg T$ csak hétfőn nem igaz
$\neg(\neg M \vee \neg T)$ = Ma hétfő van és tegnap vasárnap volt. = $M \wedge T$

8. *a)* Én megyek veled vagy Ottóval.
b) Veled megyek, vagy Ottóval megyek.
c) Nem megyek veled.
d) Te nem mégy, vagy én nem megyek. = Nem megyek veled.

9. *a)* $A \wedge B \wedge \neg C$ *b)* $(A \vee B) \wedge \neg C$
c) $\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg C$ *d)* $(A \wedge B) \vee C$

10. A, B, D vagy A, C, E, tehát csak A-ról mondhatjuk biztosan, hogy hazudik.

11. *a)* Az $ABCD$ húrnégyszög és átlói nem merőlegesek. LEHET IGAZ
b) Az $ABCD$ húrnégyszög és $ADC\sphericalangle < 90°$ és a BCD háromszög egyenlő szárú. HAMIS = NEM LEHET IGAZ
c) Az átlók nem merőlegesek, az $ADC\sphericalangle < 90°$ és a BCD háromszög nem egyenlő szárú. BIZTOS IGAZ
d) Nem húrnégyszög és az átlók merőlegesek és az $ADC\sphericalangle \geq 90°$. HAMIS = NEM LEHET IGAZ

Rejtvény: A leghátsó kivételével mindenki megszabadulhat a következő stratégiával: a leghátsó fehéret mond, ha páratlan számú fehér sapkát lát, különben feketét mond.

3. Logikai műveletek – implikáció, ekvivalencia

1. *a)* $B \to A$ *b)* $\neg A \to \neg B$ *c)* $A \to B$ *d)* $A \vee A\neg B$

2. *a)* $A \to B$ *b)* $\neg B \to \neg A$ *c)* $B \to A$ *d)* $B \to A$
e) $\neg B \to \neg A$ (a 2004-es kiadásban sajtóhiba van a feladat szövegében: szombat helyett vasárnap áll)
f) $B \leftrightarrow A$ *g)* $A \leftrightarrow B$

3. *a)* Ha az n szám 36-ra végződik, akkor 4-gyel osztható.
b) Ha az n szám 12-vel osztható, akkor nem prím.
c) Ha az n szám 4-gyel osztható, akkor nem prím és páros.
d) Az n szám páros és számjegyeinek összege 3-mal osztható, akkor és csak akkor, ha 6-tal osztható.
e) Az n szám 12-vel osztható akkor és csak akkor, ha 4-gyel osztható és számjegyeinek összege 3-mal osztható.
f) Ha n nem páros, de számjegyeinek összege osztható 3-mal, akkor n nem osztható 6-tal.

4. *a)* $(T \wedge O) \rightarrow N$
b) $D \leftrightarrow C$
c) $A \rightarrow (B \vee C)$
d) $S \rightarrow \neg(A \wedge B)$

5. Kati.

6. Gabi csak lány lehet.

7. „Igen” válasz: van arany, „nem” válasz: nincs arany.

Rejtvény: Van olyan eset, amikor 3 kártyát kell megfordítani, még akkor is, ha kihasználjuk, hogy minden számjegyből 1 van.

4. Teljes indukció

1. $n = 1$-re $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$. T.f. n-re, biz. $n+1$-re:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$
$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

2. *a)* $n = 1$-re $19 \mid 38$. T.f. n-re, biz. $n+1$-re:

$$5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} = 50 \cdot 5^{2n-1} \cdot 2^{n+1} + 12 \cdot 3^{n+1} \cdot 2^{2n-1} =$$
$$= 38 \cdot 5^{2n-1} \cdot 2^{n+1} + 12 \cdot (5^{2n-1} \cdot 2^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 2^{2n-1}).$$

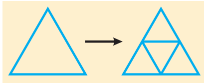
b) A feladat helyesen: $11 \mid 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^{n}$.
$n = 1$-re $11 \mid 66$. T.f. n-re, biz. $n+1$-re:

$$6^{2n+2} + 3^{n+3} + 3^{n+1} = 36 \cdot 6^{2n} + 3 \cdot 3^{n+2} + 3 \cdot 3^{n} = 33 \cdot 6^{2n} + 3 \cdot (6^{2n} + 3^{n+2} + 3^{n}).$$

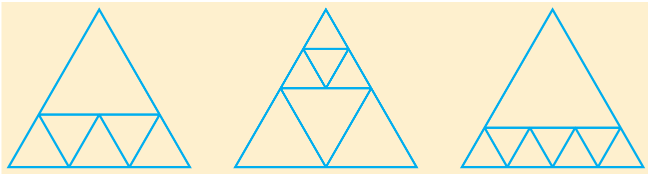
c) A feladat helyesen: $17 \mid 2^{5n+3} + 5^{n} \cdot 3^{n+2}$.
$n = 1$-re $17 \mid 391$. T.f. n-re, biz. $n+1$-re:

$$2^{5(n+1)+3} + 5^{n+1} \cdot 3^{n+3} = 32 \cdot 2^{5n+3} + 15 \cdot 5^{n} \cdot 3^{n+2} =$$
$$= 34 \cdot 2^{5n+3} + 17 \cdot 5^{n} \cdot 3^{n+2} - 2 \cdot (2^{5n+3} + 5^{n} + 3^{n+2}).$$

***3.** IGAZ



(1 $\to$ 4) a háromszögek száma 3-mal növelhető.
$n = 6, 7, 8$-ra:



4. 5, 6, 7 $(= 2 \cdot 5 - 3)$, 8 kifizethető, utána hármasával bármi.

5. Pisti tévedett.
1-ről indulva a darabok száma minden lépésben 2-vel nő, így csak páratlan lehet.

6. 1-ről indulva a darabok száma minden lépésben 3-mal vagy 5-tel nő.
a) $2002 = 1 + 2001 = 1 + 3 \cdot 667$ elérhető.
b) $2003 = 1 + 10 + 1992 = 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 664$.
c) 2, 3, 5, 8 kivételével minden szám lehet: (1, 4, 6, 7 lehet)
9 $(= 1+3+5)$, 10 $(= 1+3 \cdot 3)$, 11 $(= 1+2 \cdot 5)$-ről indulva hármasával minden elérhető.

7. *a)* A tagok szimmetrikusak a középsőre nézve:
$$a_n = n + (n+1) + \ldots + (2n-1) + \ldots + (3n-3) + (3n-2) = (2n-1)^2.$$
Teljes indukció második lépése:
$$(2n-1)^2 + 3n - 1 + 3n + 3n + 1 - n = 4n^2 - 4n + 1 + 8n = (2n+1)^2.$$
b) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \dfrac{n(n+1)}{2}$,
$$(-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^n (n+1)^2 = (-1)^n (n+1) \frac{2n+2-n}{2} = (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

8. Becsléssel:
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$
Teljes indukcióval: $n = 1$: $1 \geq 1$. T.f. n-re, biz. $n+1$-re:
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n(n+1)}+1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{\sqrt{n^2}+1}{\sqrt{n+1}} = \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}.$$

9.

Egyenesek száma:	1	2	3	4	…	n
Síkrészek száma:	2	4	7	11	…	$\dfrac{n(n+1)}{2} + 1 =$ (sejtés)

$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + 1.$$

Az $n+1$-edik egyenes az előző n egyenest n pontban metszi, ezek $n+1$ részre osztják az egyenest, és mindegyik egyenesdarab kettévág egy-egy síkrészt, így a síkrészek száma $n+1$-gyel nő.

***10.** Körök száma: 1 2 3 4 ... n.

Síkrészek száma: 2 4 8 14 ... $2+2\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}=2+2\cdot(1+2+\ldots+(n-1))$ sejtés.

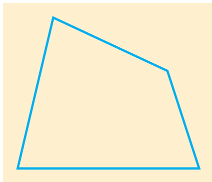
T.f.h. n körre igaz. Az $n+1$-edik kör $2n$ pontban metszi az előző n kört, ez $2n$ ív a körön, amelyek kettévágnak egy síkrészt, így $2n$-nel nő a síkrészek száma.

Kiszínezhető.

1 körre igaz. T.f.h. n körre igaz. Rajzoljuk be az $n+1$-edik kört, és minden , a körön belüli síkrészt színezzük az ellenkezőjére. Ezzel az új határvonalak jók lesznek, a régiek nem változnak.

A háromszögek esete abban különbözik, hogy két háromszögnek maximum 6 metszéspontja lehet.

***11.** $n = 4$-re igaz:



T.f.h. létezik ilyen konvex n-szög. Ennek egy tompaszögét levágva konvex $n+1$ szöget kapunk.

3-nál több hegyesszög nem lehet. T.f.h. van 4, ezek összege $2\cdot 180°$-nál kisebb. A konvex n-szög szögösszege $(n-2)\cdot 180°$. A megmaradt $n-4$ db szög összege $(n-4)\cdot 180°$-nál nagyobb kellene legyen, ami nem lehet.

***12.** $n = 1$-re igaz.

T.f.h. minden $2^{n+1}-1$-nél nem nagyobb tömeg 1, 2, ..., 2^n tömegekkel kimérhető. Adott egy $2^{n+1}-1$-nél nagyobb, de $2^{n+2}-1$-nél nem nagyobb tömeg. $2\cdot 2^{n+1}-1$-ből 2^{n+1}-t levéve $2^{n+1}-1$ marad, így egy 2^{n+1}-et használunk, ami marad, a $2^{n+1}-1$-nél nem nagyobb, tehát 1, 2, ..., 2^n tömegekkel kimérhető.

Rejtvény: A szemüveg akkor párásodik be, ha hidegről melegre megy be.

Számsorozatok

1. A számsorozat fogalma, példák sorozatokra

1. A pozitív páros számok sorozatának n-edik tagja: $2n$, a sorozat első n tagjának összege: $n(n+1)$.

2. *a)* n^2

b) $\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}$

c) $(2n-1)(n^2-n+1)$

3. A bizonyításokat például teljes indukcióval lehet elvégezni.

4. *a)* Érdemes a_n-t átalakítani így:

$$a_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}$$

b) Az a_n-t itt így érdemes felírni:

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

5. A sejtés általánosan így írható fel:

$$n^2+n^2+1+\ldots+n^2+n = n^2+n+1+n^2+n+2+\ldots+n^2+2n.$$

Az összegzés után a bizonyítás közvetlenül adódik.

2. Példák rekurzív sorozatokra

1. *a)*, *b)*, *c)* teljes indukcióval könnyű igazolni.

2. –

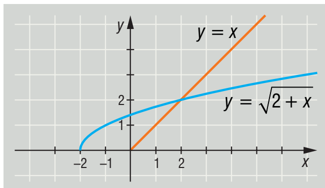
3. Az egyes „ferde” vonalak mentén adódó összegek a következők:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

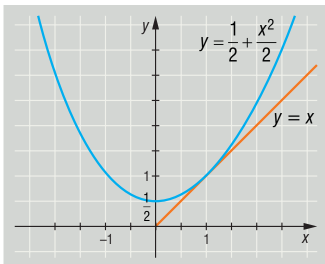
Az általános sejtés tehát az lehet, hogy az n-edik sorban álló számok öszege f_n.
A sejtés teljes indukcióval igazolható.

4. A sorozat tulajdonságait teljes indukcióval igazolhatjuk. A szemléltetést az 1. ábrán lehet elvégezni.

5. A sorozat tulajdonságait teljes indukcióval igazolhatjuk, a sorozat tagjainak szemléltetését a 2. ábrán végezhetjük el.



1. ábra



2. ábra

3. Számtani sorozatok

1. $3+6+9+...+999=\dfrac{2\cdot 3+332\cdot 3}{2}\cdot 333=166833.$

2. A feltételből a1 = 2 és d = 4 adódik. Így azt a legkisebb pozitív egész n-et keressük, amelyre
$$\frac{2\cdot 2+(n-1)\cdot 4}{2}\cdot n\geq 1000.$$
Az eredmény: $n = 23$.

3. Elég igazolni, hogy az $a^2 + c^2 = 2b^2$ és $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{2}{a+c}$ egyenlőségek ekvivalensek.

4. *a)* $a_1=-7,\ d=3.$
b) Két megoldás van:
• $a_1 = 1,\ d = 3,$
• $a_1 = -\dfrac{122}{3},\ d = \dfrac{59}{3}.$
c) A kitűzött feladat hibás. A helyes feladat:
$a_3^2+a_7^2 = 122,$
$a_1+a_7 = 4.$
Ennek két megoldása van:
• $a_1=-7,\ d=3,$
• $a_1 = \dfrac{67}{5},\ d = -\dfrac{19}{5}.$

5. Nem. Indirekt bizonyítást alkalmazva arra az ellentmondásra jutunk, hogy $\sqrt{3}$ racionális szám.

6. –

7. 5050.

8. 450,5 másodperc alatt esik le a test 4410 m magasról.

9. $2\cdot(1+2+...+12)=2\cdot\dfrac{1+12}{2}\cdot 12=156.$

10. Az egyenlőtlenséget kielégítő egész koordinátájú pontok száma 221.

4. Mértani sorozatok

1. $a_1=6,\ q=2.$

2. –

3. $q=2$

4. 1023.

5. *a)* $a_1 = 3,\ \ q = 2$
   b) A feladatban hiba van, a helyes feladat:
   $a_7 - a_4 = -216,$
   $a_5 - a_4 = -72.$
   Az egyetlen megoldás: $a_1 = -3$, $q = -2$ (a $q = 1$ eset nem ad jó megoldást).
   c) Két megoldás van:
   - $a_1 = -5,\ \ q = 2,$
   - $a_1 = -5,\ \ q = -2.$

6. –

7. A helyesen kitöltött táblázat:

27	54	108	216
9	18	36	72
3	6	12	24
1	2	4	8

8. Két megoldás van:
   - 2, 8, 32;
   - 14, 14, 14

   (A második megoldás esetében a számtani sorozat differenciája 0, a mértani sorozat hányadosa 1.)

9. A számtani sorozat első tagja 3, különbsége 15.

5. Kamatszámítás, törlesztőrészletek kiszámítása

1. Jelölje p az $1 + \frac{1}{100} = \frac{101}{100}$ számot (ez az egyhavi kamat kiszámításához szükséges), akkor a havi törlesztő részlet:

$$5000 \cdot \frac{p^{24}}{p^{24} - 1} \approx 23537 \text{ Ft.}$$

2. Feltesszük, hogy havonta egyenlő részletekben törlesztjük a kölcsönt, ekkor a szükséges havi összeg a $q = 1 + \frac{1}{200} = \frac{201}{200}$ jelölés felhasználásával:

$$50000 \cdot \frac{q^{240}}{q^{240} - 1} \approx 71643 \text{ Ft.}$$

Tehát a kölcsönt felvehetjük.

Térgeometria

1. Térelemek

1. 15 rész

2. *a)* 5 vagy 8 rész. *b)* 9, 10 vagy 12 rész.

3. *a)* $\sqrt{2}a$ *b)* $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ *c)* $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

4. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

5. 90º; 120º

6. 35,26º; 90º

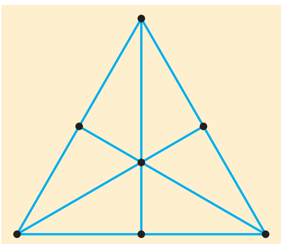
7. $\sqrt{3}a$; $\sqrt{5}a$; 39,23º; 18,43º

***9.** Igaz

2. A sík és a tér felosztása

1. $\frac{n^2-3n+2}{2}$ véges; $2n$ végtelen tartomány

2.



3. 35

4. $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$

5. $\binom{\binom{n}{2}}{2}=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{8}$

6. 550

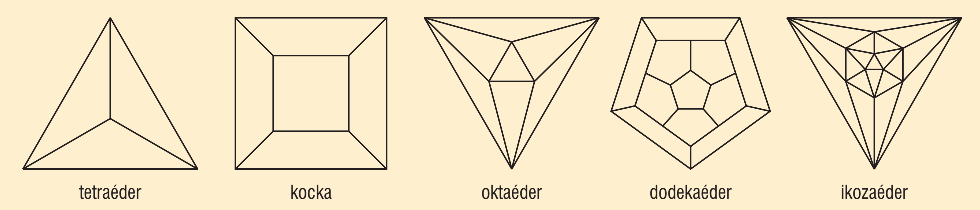
***7.** $\binom{n}{3}+3\cdot\binom{n}{4}$

3. Testek osztályozása, szabályos testek

1. Igen. Pl. ilyen egy térbeli kereszt.

2. Legkevesebb 6, legfeljebb 20.

3.



4. $\frac{a}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}a$; $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

5. $10\sqrt{6}$ cm

6. 8,16 cm; 16,32 cm

***7.** $3\sqrt{2}a$

***8.** $\frac{\sqrt{3}}{6}a$

4. A terület fogalma, a sokszögek területe

1. $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

2. 14 cm; 25,38°; 154,62°

3. 7,48 cm; 14,7 cm; 46,68°

4. 7-szerese.

5. $\frac{1}{7}$ része.

6. A súlyvonal a megfelelő egyenes.

7. 172,05 cm^2.

9. $\frac{8}{3}$ területegység.

***10.** Igen. Az oldalai lehetnek: 3 és 6, vagy 4 és 4.

***11.** *b)* $n = 3$, 4 vagy 6 esetén.

5. A kör és részeinek területe

1. 3; 9

2. $\sqrt{2}$

3. Igen.

4. 6,28 km-rel

5. *a)* 2,09 cm^2 *b)* 3 cm^2 *c)* 1,91 cm^2

6. 0,56 m^2

7. *a)* 5,5 cm^2 *b)* 15,28 cm^2 *c)* 15,71 cm^2 *d)* 11,25 cm^2

8. *a)* $\frac{1}{2}$ *b)* $\frac{1}{2}$

10. Egyenlők.

11. 45,32 cm^2

12. 6,77 cm^2

***13.** 262,88 cm^2

6. A térfogat fogalma, a hasáb és henger térfogata

1. 8 féle. $A_{max} = 146$ (1; 1; 36). $A_{min} = 66$ (3; 3; 4).

2. Élei: $6\sqrt{2}; 8\sqrt{2}; 10\sqrt{2}$; $V = 960\sqrt{2}$; $A = 752$; 45º; 64,9º

3. Élei: 4 cm; 6 cm; 8 cm. $A = 208$ cm^2

4. Élei: 10 cm; 15 cm; 20 cm. $V = 3000$ cm^3

5. *a)* $A = 686{,}6$ cm^2; $V = 866$ cm^3 *b)* $A = 1344{,}1$ cm^2; $V = 3441$ cm^3
c) $A = 1719{,}62$ cm^2; $V = 5196{,}2$ cm^3 *d)* $A = 3538{,}84$ cm^2; $V = 2628{,}32$ cm^3

6. *a)* $V = 785{,}4$ cm^3; $A = 471{,}24$ cm^2 *b)* $V = 10000$ cm^3; $A = 2628{,}32$ cm^2
c) $V = 17904{,}94$ cm^3; $A = 5080{,}99$ cm^2

7. 21,46%

8. $V_1 = 13244{,}76$ cm^3; $A_1 = 3358{,}7$ cm^2 $V_2 = 2548{,}9$ cm^3; $A_2 = 1119{,}57$ cm^2

9. $V_1 = 628{,}32$ cm^3; $A_1 = 408{,}41$ cm^2 $V_2 = 1005{,}31$ cm^3; $A_2 = 653{,}45$ cm^2

10. $V_1 = 288{,}5$ cm^3; $V_2 = 711{,}5$ cm^3 $A_1 = 330{,}9$ cm^2; $A_2 = 500{,}1$ cm^2

***11.** $A = 112$ cm^2; $V = 64$ cm^3

***12.** 3 féle.

7. A gúla és a kúp térfogata

1. *a)* 276,39 cm^3; 333,78 cm^2 *b)* 623,61 cm^3; 487,3 cm^2
c) 1038,09 cm^3; 656,17 cm^2 *d)* 1500 cm^3; 840,77 cm^2

2. *a)* 157,08 cm^3; 201,22 cm^2 *b)* 301,59 cm^3; 301,59 cm^2
c) 301,59 cm^3; 301,59 cm^2

3. 58,93 cm^3

4. 678,41 cm^2

5. 748,55 cm^2

6. 65,35 cm^3

7. 323,61 cm^2; $333{,}\dot{3}$ cm^3

8. $166{,}\dot{6}$ cm^3; 173,21 cm^2

9. 30,16 cm^3; 52,78 cm^2

***11.** $A = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^2$; $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{18}$

***12.** $a = 3r$ esetén.

8. A csonka gúla és a csonka kúp

1. *a)* 16,69 cm *b)* 1148,58 cm^3; 720,2 cm^2
c) 82,76º

2. *a)* 254,29 cm^3; 275,96 cm^2 *b)* 282,92 cm^3; 288,5 cm^2

3. *a)* 3517,75 cm^3; 3119,38 cm^2 *b)* 4345,92 dm^3; 1518,58 dm^2
c) 107,93 dm^3; 157,58 dm^2

4. 97,49 cm^3; 119,38 cm^2

5. $V_1 = 33{,}\dot{3}$ cm^3; $V_2 = 233{,}\dot{3}$ cm^3 $A_1 = 72{,}17$ cm^2; $A_2 = 266{,}51$ cm^2

6. $A = 360$ cm^2; $\alpha = 53{,}13°$

7. $\dfrac{7}{24}\pi$ dm^3; $\dfrac{7}{4}\pi$ dm^2

8. *a)* 18,93 cm; 6,31 cm *b)* 21,85 cm; 11833,45 cm^3

9. 647,87 dm^3

10. 390,23 dm^3

9. A gömb térfogata és felszíne

1. *a)* $5\,575\,280\ \text{cm}^3$; $152\,053\ \text{cm}^2$ *b)* $33\,510\ \text{cm}^3$; $5027\ \text{cm}^2$

2. $2974\ \text{m}^3$

3. $104\ \text{cm}^2$

4. $\dfrac{3\pi \cdot r^2}{4}$; $\dfrac{3}{16}$ rész

5. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}r$

7. 27,14 N

8. $1{,}6\ \text{dm}^3$; $6{,}62\ \text{dm}^2$

***9.** $V = \dfrac{\pi}{3}h^2(3r - h)$

***10.** $\dfrac{4\pi}{81}R^3$

***11.** $268\,083\ \text{cm}^3$; $20\,106\ \text{cm}^2$

10. Egymásba írt testek

1. $1440\ \text{cm}^3$

2. $36{,}74\ \text{cm}^3$

3. *a)* 10 cm; $2\sqrt{34}$ cm; $2\sqrt{41}$ cm *b)* $160\ \text{cm}^3$; $55{,}46\ \text{cm}^2$

4. $216\ \text{cm}^3$

5. 0

6. 30,23%

7. $\rho = 2{,}07$ cm; $A = 189{,}61\ \text{cm}^2$; igaz

8. $18\,724{,}57\ \text{cm}^3$; $4681{,}14\ \text{cm}^2$

***9.** 39,23%

10. $\dfrac{A_1}{A_2} = 4$; $\dfrac{V_1}{V_2} = 8$

11. 3,41 cm

12. $\sqrt[3]{\dfrac{5}{9}} \cdot m$ (m a kúp magassága)

Valószínűségszámítás, statisztika

1. Geometriai valószínűség

1. 0,29.

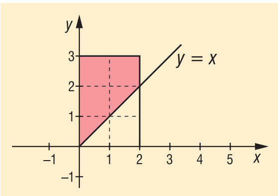
2. 0,25.

3. $y^2 = 48,\ \ y \approx 7.$

4. 0,5.

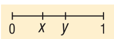
5. $1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$

6.

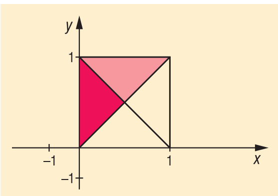


$p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$

7.



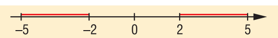
$0 \le x,\ y \le 1.$



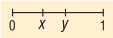
$x + y \le 1,$

$p = \frac{1}{2}.$

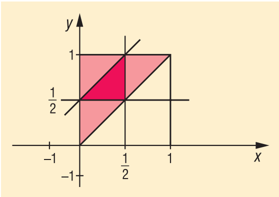
8. $-5 \le b \le 5,$
$b^2 - 4 \ge 0,$
$|b| \ge 2.$



$p = \frac{6}{10}.$

9. 

$0 \le x < y \le 1.$



$$\left.\begin{array}{r} y \ge 1-y \\ x+(1-y) \ge y-x \\ 1-x \ge x \end{array}\right\} p = \frac{1}{4}.$$

Rejtvény: A valószínűség 1, mert a három pont meghatároz egy síkot.

2. Várható érték

1. Tornádóra fogadva a nyereség várható értéke: –0,1.
Villámra fogadva a nyereség várható értéke: 0.
Szélvészre fogadva a nyereség várható értéke: –0,1.
Tehát Villámra érdemes fogadni.

2. 80 Ft.

3. $\frac{2}{16}\cdot 60+\frac{8}{16}\cdot 15+\frac{6}{16}\cdot 10-20=-\frac{5}{4}.$

4. $\approx 0{,}275.$

5. Páros: $\frac{1}{2}\cdot 18-10=-1.$ 3-mal osztható: $\frac{3}{10}\cdot 40-10=2.$ 5-tel osztható: $\frac{2}{10}\cdot 50-10=0.$
Tehát 3-mal oszthatóra érdemes tippelni.

6. $\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}\right)\cdot 500-50=-6.$

7. 100 Ft helyett 1200 Ft-tal számolva:

$$\frac{3}{4}\cdot x-\frac{1}{4}\cdot 1200=0,$$
$$x=400\ \text{(Ft)}.$$

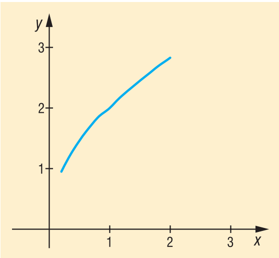
3. Statisztika

1. Magyarország minden tekintetben utolsó.
Nyugati nyelveket tekintve Szlovénia vezet, Csehország a második.
Valamely idegen nyelveknél számít, hogy az ország korábban más országokkal együtt alkotott egy államot.

3. *d)* Budapesten szállodát.

4. *a)* Többség az iskolában tanórán találkozott az internettel.
b) Együtt nem 100%.
c) Mit jelent a „megismerkedni”? Lehet, hogy megismerkedett vele, de nem szokott internetezni!

5. *a)*



b) $1{,}68 \approx 1{,}7$

6. Zöldek, mert bár az adatok ugyanazok, az ő grafikonjuk „szemre” erőteljesebb növekedést mutat.

7. Péter javított, ezért az y tengelyen az egység nagyobb legyen.
Péter rontott, ezért az y tengelyen az egység kisebb legyen.

8. *b)* 31,5.
c) 36,8.
d) Ahol az 50%-ot eléri: 1500–1999 osztályközepe: 1750 ezer.

10. *a)* $a_{2004} = 59$.
b) Az egymás utáni tagok távolsága feleződik: 19; 99; 59; 79; 69; 74; ...

$$a_{2004} = 99 - 20\left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^{2002}\right) \approx 72{,}34$$

11. *a)* Az átlag 3-mal nő, a szórás nem változik.
b) Az átlag és a szorzás is az 5-szöröse lesz.

12. Ha a legnagyobb 15 lenne, a terjedelem miatt a legkisebb 7.
Középen a medián miatt 8, 8 vagy 7, 9 áll. Ezen 4 szám összege 38, a többi 4 összege $64 - 38 = 26$ kellene legyen, de az nem lehet, mert egyik sem kisebb 7-nél.
A legnagyobb szám 14 lehet $\rightarrow$ a legkisebb 6, középen 7, 9 vagy 8, 8 közül csak 8, 8 lehet, mert a 8 módusz, így a számok: 6, 6, 6, 8, 8, 8, 8, 14.

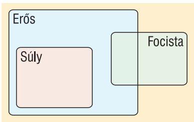
13. *c)* Iskolai végzettség, testvérek száma.

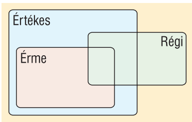
Gondolkodási módszerek – összefoglalás

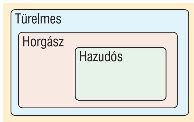
1. Halmazok, kijelentések, események

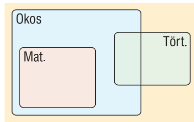
1. $((Z \setminus H) \setminus E) \cup (H \cap E) = (Z \cap \overline{H} \cap \overline{E}) \cup (H \cap E)$
$(p_Z \wedge \neg p_H \wedge \neg p_E) \vee (p_H \wedge p_E)$
$(E_Z - E_H - E_E) + (E_H \cdot E_E) = (E_Z \cdot \overline{E}_H \cdot \overline{E}_E) + (E_H \cdot E_E)$
görög saláta, tiramisu

2. *a)* Nem igaz. *b)* Nem igaz. *c)* Nem igaz. *d)* Nem igaz.



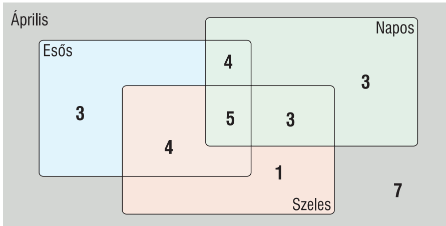




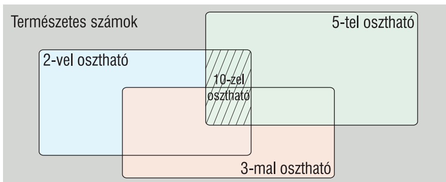


3. Április 30 napos. A halmazábrán láthatóan eddig 23 nap volt felsorolva, így a hiányzó szám a 30 – 23 = 7.

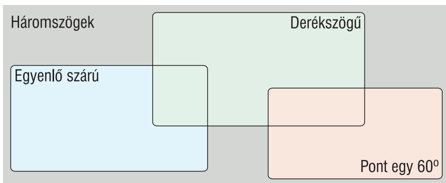
a) N napos: 15.
b) $\overline{E}$ nem esős: 14.
c) $\overline{E} \cap \overline{S} \cap \overline{N} = \overline{E \cup S \cup N} \Rightarrow 7:$ nem esős, nem szeles és nem napos.
d) $S \cup E$: szeles vagy esős: 20.
e) $\overline{E} \cap \overline{S} = \overline{E \cup S}$ nem esős és nem szeles: 10.
f) $N \cap (S \cup E)$ napos és (szeles vagy esős): 12.



4. *a)* – Minden 2-vel és 5-tel osztható természetes szám osztható 10-zel.
– Van olyan 3-mal osztható szám, amely 10-zel is osztható.
– Ha egy szám osztható 10-zel, akkor osztható 2-vel és 5-tel is.



b) – Van egyenlő szárú derékszögű háromszög.
– Nincs olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek pont egy 60º-os szöge van.
– Ha egy háromszögnek pont egy 60º-os szöge van, akkor nem lehet egyenlő szárú.



2. Kombinatorika, valószínűség

1. $4 \cdot 5 \cdot \binom{20}{4} \cdot \binom{8}{2} \cdot 3 = 60 \cdot 4845 \cdot 28 = 8\,139\,600.$

2. *a)* 26! *b)* 5! · 21! *c)* 3! · 17!

3. *a)* $\binom{12}{3}\cdot 9=1980$ *b)* $12\cdot 11\cdot 10\cdot\binom{9}{5}=33264$

4. $\frac{2}{8}=0,25$

5. Ugyanannyi: $\frac{108}{216}$.

Páros: 3 páros vagy 1 páros és 2 páratlan.
Páratlan: 3 páratlan vagy 1 páratlan és 2 páros. (Szimmetria elv.)

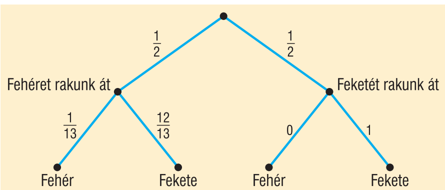
6. 4 többszöröseinek száma + 17 többszöröseinek száma – 4 · 17 többszöröseinek száma = = 100 + 23 – 5 = 118. Így a keresett valószínűség: $\frac{118}{400}=0,295$.

7. Komplementer: mind különböző $\Rightarrow 1-\frac{\frac{50!}{35!}}{50^{15}}$.

8. $1-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{19}{27}=0,\dot{7}0\dot{3}$

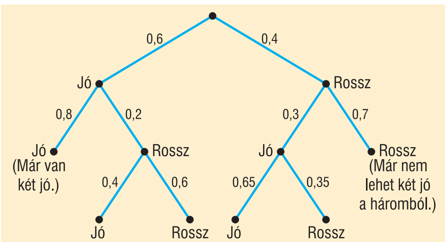
9. *a)* $\frac{2}{6}$ *b)* $\frac{4}{6}$

10.



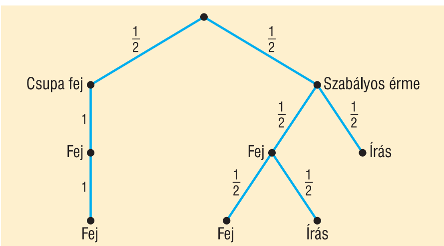
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{13}+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{25}{26}=0,9\dot{6}1538\dot{4}$$

11.



$$0,6\cdot 0,8+0,6\cdot 0,2\cdot 0,4+0,4\cdot 0,3\cdot 0,65=0,606$$

12.



P(két fej) $=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{5}{8}$.

P(szabályos érme, feltéve, hogy két fejet dobunk) $=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{8}{5}}=\frac{1}{5}=0,2$.

Algebra és számelmélet – összefoglalás

1. Számok és műveletek

1. 3.
2. Igen, a négyzete is irracionális.
3. Pl.: 2,323323332...
4. 2 km.
5. 96%-át.
6. 17%-os a haszon.
7. $\approx 77\%$, $\approx 29\%$.
8. 30 tanuló.

2. Számelmélet, oszthatóság

1. $2^{18} \cdot 5^{11} \cdot 7^{10}$.
2. A számjegyek összege 3, nem lehet prím.
3. Nincs. p és $p + 11$ közül az egyik páros, $p = 2$-re nem igaz.
4. Igen, $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 23$, minden prímtényező kisebb 25-nél.
5. *a)* Pl.: $1988 = 11111000100_2$
   b) Pl.: $1988 = 13112_6$
6. 7-es, 8-as, 9-es.
7. 1805.

*8. $n = 5$ és $n = 13$.

3. Hatvány, gyök, logaritmus

1. 3^{25}.
2. 15 nullára végződik.
3. *a)* 18 éves, 70 kg-os tanuló esetén 27 030 m.
   b) 1 892 160 kg.
4. *a)* $2^5 = 32$ *b)* $2^{-4} \cdot 3^{-5}$ *c)* $2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

5. *a)* $9-4\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}-2\right)^2$ *b)* $16-6\sqrt{7}=\left(3-\sqrt{7}\right)^2$

6. *a)* Az első a nagyobb. *b)* Az első a nagyobb.

7. *a)* $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$; $a>3$ *b)* 6; $b\ge 0$; $b\ne 1$; $b\ne 16$

***8.** A kifejezés $=4n$.

9. *a)* 4 *b)* 16 *c)* 6

10. *a)* $\left(\dfrac{81}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{9}<\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-1}=\dfrac{3}{5}<\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2}=\dfrac{25}{9}<27^{\frac{1}{3}}=3<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=9<9^{\frac{3}{2}}=27$

b) $7^{\log_{\frac{1}{7}}5}=\dfrac{1}{5}<\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\log_7 3}=\dfrac{1}{3}<7^{\log_7 5-1}=\dfrac{5}{7}<7^{\log_{13}1}=1<7^{1-\log_{49}25}=\dfrac{7}{5}<49^{\log_7 2}=4$

c) $\log_3\dfrac{1}{27}=-3=\log_2 0{,}125<\log_{27}\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}<\log_{25}5=\dfrac{1}{2}<\log_{\sqrt{2}}8=6$

11. *a)* $x=10$ *b)* $x=\dfrac{5^2}{2^3}=\dfrac{25}{8}=3{,}125$ *c)* $x=1$

4. Műveletek racionális kifejezésekkel

1. *a)* $2a(4a-3)$ *b)* $b^2(5b+1)(5b-1)$ *c)* $7(2c+3)^2$

2. Pl. $d^2\,|\,(d-3)+(d-2)^2+(d-1)^3$

3. *a)* 1000 *b)* 2

4. *a)* $\dfrac{1-3x}{2(x^2-9)}$ *b)* $\dfrac{-2}{b^2-1}$ *c)* $\dfrac{-8}{3(x+2)}$

5. Egyenletek, egyenlőtlenségek

1. 7,5 liter 40%-os és 2,5 liter 80%-os.

2. 513.

3. 90 km.

4. 450.

5. 180 km.

6. Legkésőbb 4 órakor.

7. *a)* $n=8;\ 9;\ 11;\ 15$ *b)* $n=0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6$ *c)* $7<n<23$

8. 21 m széles, 33 m hosszú.

9. I. 20 órát, óránként 20 db. II. 16 óra; óránként 25 db.

10. 30 ▯-ért vette.

***11.** $p=\frac{1}{4};\ p=4;\ p=\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$

***12.** $p=-20$

13. *b)* $x_1=-16{,}5;\ x_2=1{,}5$ *c)* $x=\frac{1}{2}$

14. *a)* $x=\frac{7}{3}$ *b)* $x=\frac{3}{2}$ *c)* $x_1=2;\ x_2=0$

***15.** $n=4$

16. *a)* $x<\frac{3}{2}$ vagy $x>4$ *b)* $-5<x<-2$ vagy $-1<x$

17. *a)* $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}$ *b)* $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{4}{3}k\pi;\ \frac{8\pi}{15}+\frac{4}{5}l\pi;\ k,l\in\mathbb{Z}$

c) $x=\frac{\pi}{2}+l\pi;\ l\in\mathbb{Z}$ *d)* $x=2k\pi;\ x=\frac{\pi}{2}+2l\pi;\ k,l\in\mathbb{Z}$

18. *a)* $2k\pi+\frac{2\pi}{3}\le x\le\frac{7\pi}{3}+2k\pi;$ *b)* $2l\pi+\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5\pi}{3}+2l\pi;\ l\in\mathbb{Z}$

6. Egyenletrendszerek

1. *a)* Kb. 65 Ft 1 liter üdítő ára.
b) 41 Ft-nak adódik 1 liter ára.
Az ár nem arányos az üdítő mennyiségével.

2. 8 piros; 42 kék.

3. 9 polc; 112 könyv.

4. *a)* 77-szerese.
b) 98,7%-kal kisebb.

5. *a)* $x=-\frac{3}{5};\ y=\frac{4}{5}$ *b)* $x_1=-3;\ y_1=-1;\ \ x_2=\frac{3}{2};\ y_2=\frac{1}{2}$

c) $x_1=10;\ y_1=11;\ \ x_2=-10;\ y_2=-11$

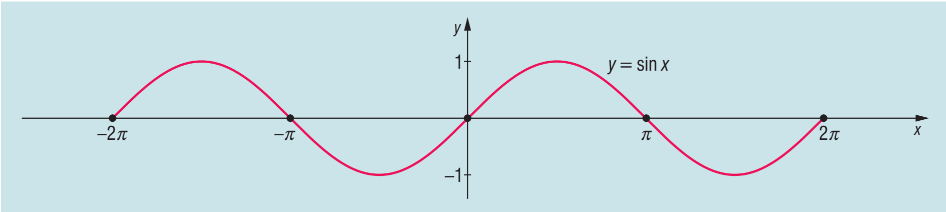
6. *a)* $x_1=-1;\ y_1=19;\ \ y_2=4x_2;\ x_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *b)* $x=-\frac{1}{4};\ y=\frac{7}{4}$

c) $x_1=2;\ y_1=5;\ \ x_2=2;\ y_2=-5;\ \ x_3=-2;\ y_3=5;\ \ x_4=-2;\ y_4=-5;$
$x_5=5;\ y_5=2;\ \ x_6=5;\ y_6=-2;\ \ x_7=-5;\ y_7=2;\ \ x_8=-5;\ y_8=-2$

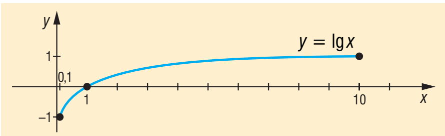
Függvények – összefoglalás

1. A függvény fogalma, grafikonja, egyszerű tulajdonságai

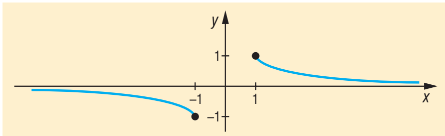
1. *a)*



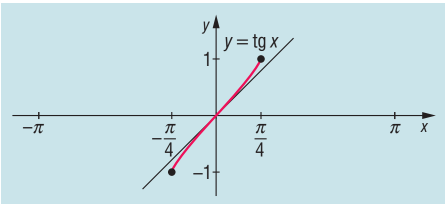
b)



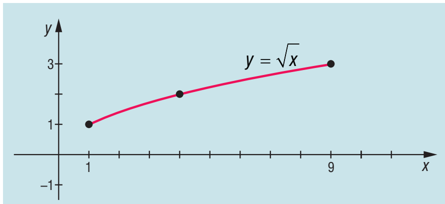
c)



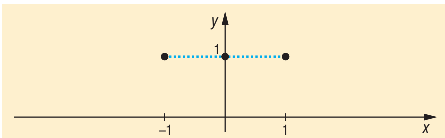
d)



e)



f) A függvény görbéje nem rajzolható meg pontosan, két szakasz mentén mindenütt sűrűn elhelyezkedő pontokból áll.



2. *a)* injektív;
b) egyik sem;
c) egyik sem;
d) szürjektív;
e) bijektív;
f) injektív.

2. Műveletek függvényekkel

1. *a)* $f \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4$;
b) $f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2^{x^2}$;
c) $g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 4^x$;
d) $g \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2^{2^x}$.

2. $f \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$; $f \circ f \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$;

$f \circ f \circ \ldots \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$, az f n-szer szerepel.

3. *a)* $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{2}x - 3;$

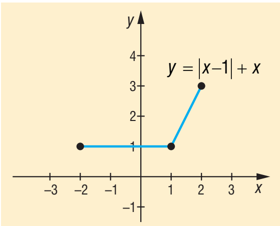
b) $g^{-1}\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x};$

c) $h^{-1}\colon [0;\,1] \to [0;\,1],\ x \mapsto \sqrt{1-x^2};$

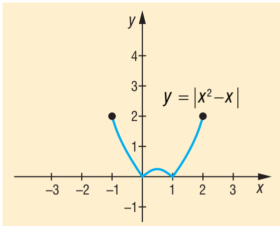
d) $k^{-1}\colon [0;\,1] \to [-1;\,0],\ x \mapsto -\sqrt{1-x^2};$

3. Függvénytulajdonságok

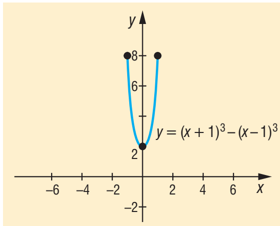
1. *a)*



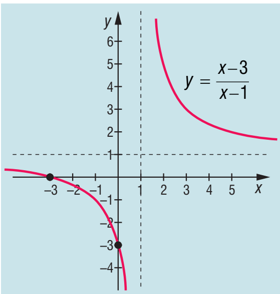
b)



c)

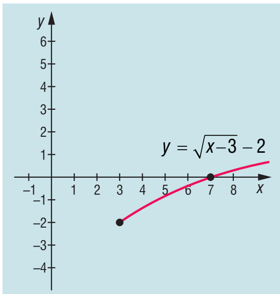


2. *a)*



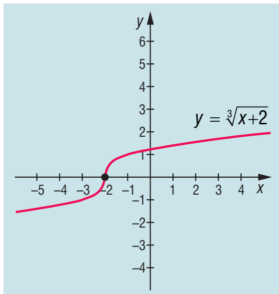
Zérushely: $x = -3$.

b)



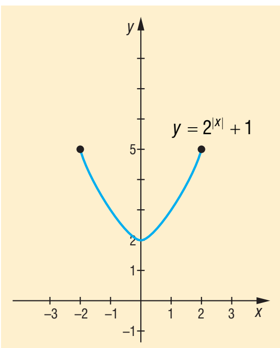
Zérushely: $x = 7$.

c)



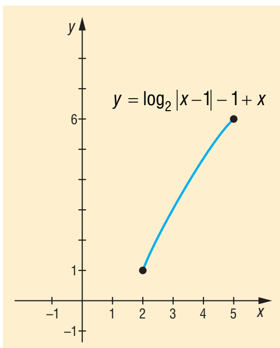
Zérushely: $x = -2$.

3. *a)*



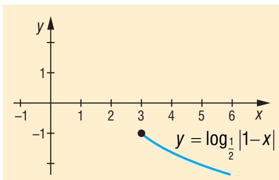
Minimumhely $x = 0$, minimum értéke: 2; maximumhelyek: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, maximum értéke: 5.

b)



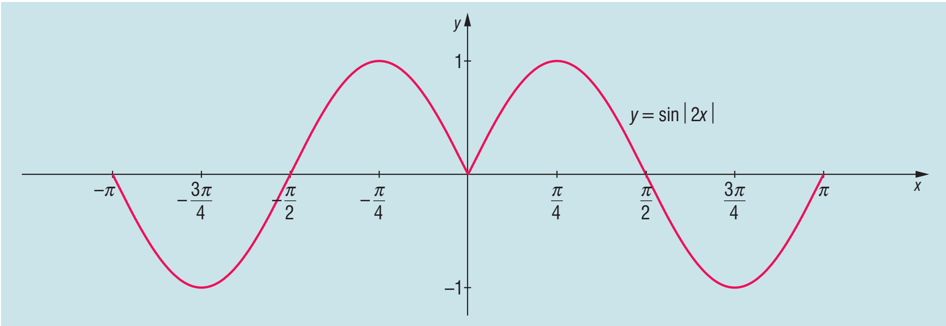
Minimumhely $x = 2$, minimum érték: 1; maximumhely: $x = 5$, maximum érték: 6.

c) A kitűzött feladatban hiba van. A helyes függvény: $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} |1-x|$, $x \in [3;\,+\infty[$



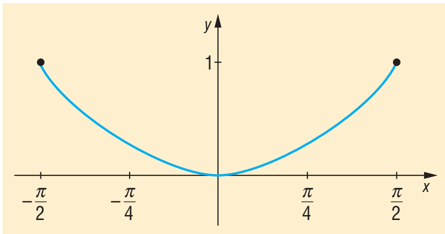
A függvénynek minimuma nincs (alulról nem korlátos), maximumhelye $x = 3$, a maximum érték: -1.

d)



Minimumhelyek: $x_1 = -\dfrac{3\pi}{4}$ és $x_2 = \dfrac{3\pi}{4}$, a minimum értéke: –1, maximumhelyek: $x_3 = -\dfrac{\pi}{4}$ és $x_4 = \dfrac{\pi}{4}$, a maximum értéke: 1, az $x = 0$ helyen helyi minimuma van a függvénynek, a minimum értéke 0.

e) Minimumhely $x = 0$, a minimum értéke: 0, maximumhelyek $x_1 = -\dfrac{\pi}{2}$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$, a maximum értéke 1.



4. A függvény zérushelye: $x = 0$, minimumhelye $x = -1$, a minimum értéke: –1, maximumhelye $x = 1$, a maximum értéke: 1.

5. *a)* Az egyetlen valós gyök: $x = 2$.
b) Az egyetlen valós gyök: $x = 4$.
c) A két valós gyök: $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$.

6. *a)* A kitűzött feladatban hiba van. A helyes feladat:

$$\log_{x-2} x \le \log_{x-2} 4, \quad x > 2,\ x \ne 3.$$

A megoldás: $3 < x \le 4$.
b) A megoldás: $-2 < x < 1$.
c) A megoldások a következő intervallumok: $-\dfrac{\pi}{3} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

7. *a)* Egy valós gyöke van: $x = \dfrac{1}{2}$.
b) Két valós gyöke van: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.
c) A két valós gyök: $x_1 = 3$ és $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

8. Nem periodikus, indirekt úton lehet bizonyítani.

Geometria – összefoglalás

1. Alapvető fogalmak

1. *a)* hamis; *b)* igaz

2. *a)* $AB \leq 4$ cm; *b)* igaz

3. A szögek nagysága: 42º, 57º, 72º, 87º, 102º.

4. A hajó az északi iránnyal +105º-ot bezáró, közelítőleg délnyugati irányban halad.

5. Jelölje a park hosszabbik oldalának hosszát a, a rövidebbikét b. Ha $\frac{a}{b} \leq 2$, akkor a közrefogott alakzat négyzet, ha $\frac{a}{b} > 2$, akkor az ösvények és a park határa egy hatszöget fog közre.

6. Legfeljebb 4 pontot kaphatunk így. Nincs mindig megfelelő pont.

7. A metszéspontok száma 40.

8. *a)* 8 térrész; *b)* 15 térrész; *c)* 16 térrész; *d)* 29 térrész.

2. Geometriai transzformációk

2. Két megfelelő négyzet van, csúcsaik rendre (16; 0), 0; 16), (–16; 0), (0;–16), illetve (8; 8), (–8; 8), (–8; -8), (8;–8).

4. *a)* A közös rész egy $\frac{4}{3}$ cm oldalú szabályos háromszög. $K = 4$ cm, $T = \frac{4\sqrt{3}}{9}$ cm$^2 \approx$ $\approx 0{,}77$ cm^2.

b) Az egyesítés egy konkáv hétszög. $K = 20$ cm, $T = \frac{68\sqrt{3}}{9}$ cm$^2 \approx 13{,}087$ cm^2.

7. *a)* $A'(-4; 10)$, $B'(2; -6)$, $C'(16; 4)$
b) $A'(-10; 12)$, $B'(-4; -4)$, $C'(10; 6)$

8. A nagyítás 80-szoros, a kép és a vászon távolsága 3,95 m.

3. Vektorok. Szögfüggvények

1. $h \approx 34{,}29$ m.

2. $d \approx 8{,}5$ m.

3. $\alpha \approx 25{,}15º$.

4. *a)* $\sin\alpha = 0{,}6$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$.

b) $\cos\alpha = 0{,}8$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$.

c) $\sin\alpha \approx 0{,}9029$; $\cos\alpha \approx 0{,}4299$; $\operatorname{ctg}\alpha \approx 0{,}4762$.

d) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}+2 \approx 4{,}2361$; $\sin\alpha \approx 0{,}9029$; $\cos\alpha \approx 0{,}4299$.

5. Az osztópontok helyvektorai rendre a B csúcstól a C csúcs felé haladva:

$$\frac{5\vec{b}+\vec{c}}{6},\ \frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3},\ \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\ \frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3},\ \frac{\vec{b}+5\vec{c}}{6}.$$

6. $\vec{f}_{AB} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\vec{f}_{BC} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$, $\vec{f}_{CA} = \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}$, $\vec{s}_{ABC} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$.

7. *a)* $\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$ *b)* $\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$, $\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}$ *c)* $\frac{\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

Az átlók felezőpontjait összekötő szakasz felezőpontja azonos a középvonalak metszéspontjával.

9. $y = -6$

4. Nevezetes síkidomok tulajdonságai

1. *a)* $\alpha = 40°$; $b \approx 7{,}51$ cm; $c \approx 7{,}05$ cm.

b) $a \approx 4{,}97$ cm; $\alpha \approx 41{,}31°$; $\gamma \approx 43{,}69°$.

c) $c \approx 8{,}88$ cm; $\alpha \approx 61{,}19°$; $\beta \approx 73{,}81°$.

d) $\alpha \approx 59{,}36°$; $\beta \approx 81{,}05°$; $\gamma \approx 39{,}59°$.

3. A befogók: $a \approx 18{,}26$ cm; $b \approx 8{,}16$ cm. A hegyesszögek: $\alpha \approx 65{,}92°$; $\beta \approx 24{,}08°$; $T = \frac{68\sqrt{3}}{9}\ \text{cm}^2 \approx 13{,}087\ \text{cm}^2$.

4. *a)* $\alpha \approx 75{,}54°$; $T \approx 17557{,}83\ \text{m}^2$.

b) A maximális területű játéktér oldalai 119,46 m és 73,49 m, területe $T \approx 8779{,}12\ \text{m}^2$.

5. *a)* $\alpha = 50°$; $\beta = 60°$; $\gamma = 70°$.

b) $a \approx 3{,}06$ cm; $b \approx 3{,}46$ cm; $c \approx 3{,}76$ cm; $T \approx 4{,}99\ \text{cm}^2$.

c) $T_a \approx 1{,}52\ \text{cm}^2$; $T_b \approx 2{,}46\ \text{cm}^2$; $T_c \approx 3{,}6\ \text{cm}^2$.

6. A belső szögfelezők által meghatározott négyszög szögei valamelyik körüljárási irányban: 87,5°; 115°; 92,5°; 65°. Ha egy konvex négyszög belső szögfelezői közrefognak egy négyszöget, akkor az mindig húrnégyszög.

7. *a)* Az oldalfelező pontok által meghatározott négyszög téglalap, így az eredeti négyszög átlói merőlegesek egymásra.

b) Az oldalfelező pontok által meghatározott négyszög rombusz, így az eredeti négyszög átlói egyenlő hosszúak.

8. *a)* $n = 9$;
b) n (a sokszög oldalszáma) lehetséges értékei: 14, 15, 16, 17, 18.

9. A sokszög oldalainak száma: $n = 2k + 3$.

10. A legkisebb szög 117°-os, a legnagyobb 171°-os.

5. Koordinátageometria

1. *a)* $A'(4;\,10)$, $B'(8;\,-4)$, $C'(-6;\,2)$
b) $S\left(2;\,\dfrac{8}{3}\right)$
c) $\left(x - \dfrac{97}{43}\right)^2 + \left(y - \dfrac{83}{43}\right)^2 = \dfrac{126034}{1849}$
d) $K_{ABC} = 2\left(\sqrt{53} + \sqrt{58} + \sqrt{41}\right) \approx 42{,}6$
e) $T_{ABC} = 86$

2. Az érintő egyenlete: $-3x + 4y = -43$.

3. A csúcsok koordinátái $(0;\,0)$, $(0;\,-3)$, $(4;\,0)$, a háromszög területe 6 egység.

4. A $H_1(-3;\,-5)$ harmadoló pontra illeszkedő érintők egyenlete $x = -3$ és $8x - 15y = 51$, a $H_2(-4;\,-7)$ harmadoló pontra illeszkedő érintők egyenlete pedig

$$y = \left(4 + \frac{6\sqrt{14}}{7}\right)x + 9 + \frac{24\sqrt{14}}{7} \quad \text{és} \quad y = \left(4 - \frac{6\sqrt{14}}{7}\right)x + 9 - \frac{24\sqrt{14}}{7}.$$

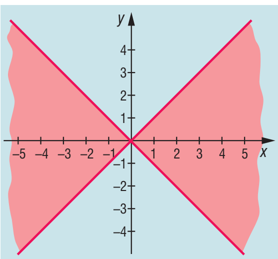
5. A súlypontok halmaza az $y = 2x + \dfrac{1}{3}$ egyenletű egyenes kivéve a $\left(\dfrac{23}{19};\,\dfrac{46}{19}\right)$ pontot, ugyanis ekkor nem jön létre háromszög.

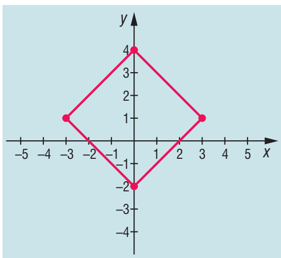
6. *a)* $a_1 = -3$; $a_2 = 1$ *b)* $a = -\dfrac{1}{2}$

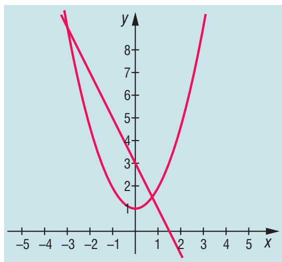
7. $T = 29$

8. A két érintő hajlásszöge $\approx 141{,}06$.

9. $a = 2\sqrt{3}$; $T = 3\sqrt{3}$.

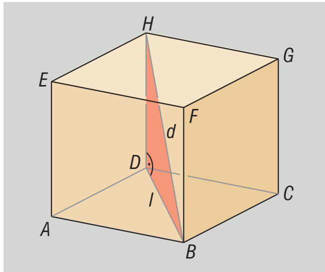
10. *a)*


b)


c)


Középszintű érettségi gyakorló feladatsorok

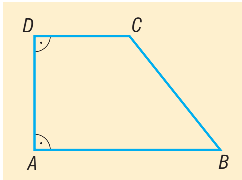
1. Feladatsor I. rész



1. $\left(\dfrac{9}{36}\right)^{-\frac{1}{2}}=2.$

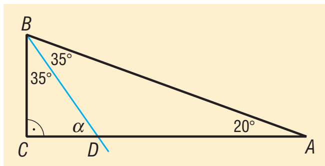
2. A kocka egy lapján Pitagorasz-tétével kapjuk a lapátló hosszát: $l=6\sqrt{2}$ cm; majd $BDH_\triangle$-ben szintén Pitagorasz tételével a kocka testátlóját, amely: $d=6\sqrt{3}$ cm.

3. *B* állítás a hamis. Pl.:



Az ábrán látható derékszögű trapéz nem húrnégyszög.

4. A bal oldalon lévő szorzást (zárójelfelbontást) elvégezve, majd x-et kiemelve két tagból kapjuk, hogy $x^2+(b+2)x+2b$. Ez a kifejezés egyenlő x^2+cx+6-tal, melyből a másodfokú polinomok együtthatóinak egyenlőségéből következik, hogy $b+2=c$ és $2b=6$, ezekből egyenesen ered $b=3$ és $c=5$ érték.



5. $BDC\sphericalangle=?;\quad \alpha=?$
Az $ABC_\triangle$ harmadik szöge ekkor 70º. BD szögfelező két háromszögre bontja az $ABC_\triangle$-et: $CDB_\triangle$-ben a belső szögek összegére vonatkozó összefüggés alapján:

$$\alpha=180^\circ-(90^\circ+35^\circ)=55^\circ.$$

6. A két gyermek életkorának összege: x.
Az apa életkora a feladat feltétele szerint ekkor: $3x$.
Négy év múlva a gyermekek életkorának összege: $x+8$.
Az apa életkora négy év múlva: $3x+4$.
A feladat szerint felírható $3x+4=2x+16$ egyenletből következik, hogy jelenleg a két gyermek életkorának összege 12 év, így az apa most 36 éves.

7. Két egyenes párhuzamosságának feltétele, hogy iránytangenseik (meredekségük) megegyezzen. Jelölje rendre az egyeneseket „e" és „f". Az „e" egyenes egyenletéből leolvasva annak normálvektorát, majd irányvektorát kapjuk, hogy:

$$\vec{n}_e(a;\,10)\to\vec{v}_e(10;-a)\to\ m_e=\frac{-a}{10}.$$

2-vel beszorozva az „f" egyenes egyenletét, leolvasva szintén a norálvektorát, irányvektorát, ered:

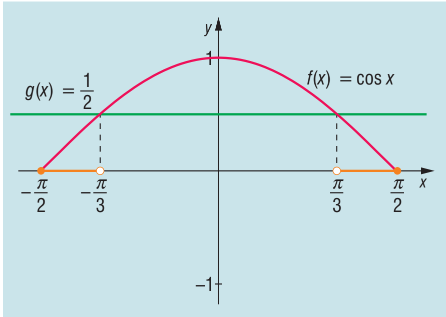
$$\vec{n}_f(1;-8) \to \vec{v}_f(8;\,1) \to m_f = \frac{1}{8}.$$

A párhuzamosság feltételéből most már következik, hogy:

$$\frac{-a}{10} = \frac{1}{8} \quad \text{vagyis:} \quad a = -\frac{5}{4}.$$

8. Célszerű a feladatot grafikus úton megoldani. Ábrázoljuk az egyenlőtlenség bal oldalán álló $f(x) = \cos x$ függvényt a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$-on, majd a jobb oldalon álló $g(x) = \frac{1}{2}$ konstans függvényt, és olvassuk le az egyenlőtlenség megoldásait, (figyelve a nyitott-zárt intervallumokra).

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$$



9. Az 1, 1, 2, 3, 5 számjegyekből képezhető ötjegyű számok száma: $\frac{5!}{2!} = 60.$

10. $(x^2 - y^2) - (x - y)$ kifejezés szorzattá alakításánál használjuk fel az $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ azonosságot, majd emeljük ki az $(x-y)$-t. Így kapjuk az $(x-y)(x+y-1)$ szorzatot.

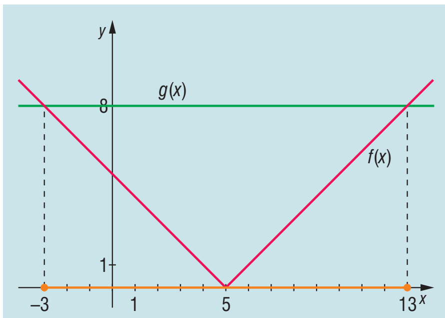
11. A feladat eredménye számolható klasszikus valószínűséggel. Jelentse „A” esemény, hogy pontosan 2 fejet dobunk. Ekkor mivel a lehetőségek a következő: FFF; III; FII; IIF; IFI; IFF; FIF; IFF.

$$P(A) = \frac{\text{kedvező eset}}{\text{összes eset}} = \frac{3}{8}.$$

12. Az adott egyenlőtlenség megoldható algebrai úton, de talán itt is, mint a 8. feladatnál lényegesen egyszerűbb, ha ábrázoljuk az egyenlőtlenség bal és jobb oldalán álló kifejezéseket függvényként, majd leolvassuk a kapott eredményt.

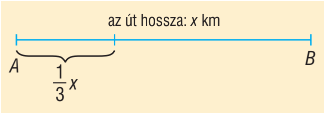
Legyen: $f(x) = |x-5|$ és $g(x) = 8$.

Megjegyzés: Az algebrai megoldásnál használjuk fel, hogy bármely $|x| \le a$ $(a \in \mathbb{R}^+)$ esetén $-a \le x \le a$, így itt: $-8 \le x - 5 \le 8$ egyenlőtlenséget kell csak megoldanunk.



1. Feladatsor II. rész / A

13.



A $v=\frac{s}{t}$ képletbe helyettesítve: $60\left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right]=\frac{\frac{1}{3}x\,[\text{km}]}{\frac{4}{5}\,[\text{h}]}\Rightarrow$

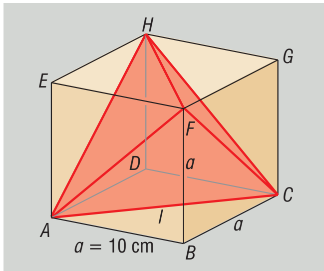
a) amiből ered, hogy az út hossza: 144 km.

b) $\frac{60+64+64}{3}=62{,}66\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

c) A töltőállomáson 2592 Ft-ot fizetett (250 Ft/l-t) a gépkocsi vezetője. Az egész úton (144 km-en) összesen 2592 : 250 = 10,368 l volt az üzemanyagfogyasztása, ezért egyenes arányossággal számolva 100 km-en 7,2 l átlagfogyasztást kapunk.

14. A szabályos tetraéder minden éle a 10 cm élű kocka egy-egy lapátlója. A lapátló hossza Pitagorasz-tételével:

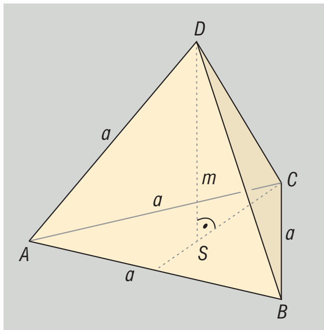
$$l=10\sqrt{2}\ \text{cm}.$$



A szabályos tetraéder felszíne: $A=\sqrt{3}\cdot l^2$, amiből: $A=200\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

A szabályos tetraéder térfogata $V=\frac{\sqrt{2}}{12}l^3$, amiből $V=\frac{1000}{3}\approx 333{,}\dot{3}\ \text{cm}^3$.

Megjegyzés: Részletesebb megoldással számoljanak a fakultációs és az emelt szintű matematikát tanulók, felhasználva, hogy bármely tetraéder térfogata számolandó: $V=\frac{T_a\cdot m}{3}$ képlettel, ahol az alaplap területére használják $T_\triangle=\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}$ összefüggést, valamint a testmagasság hosszának számolásánál bizonyítsák be, hogy a test magasságának talppontja az alaplap súlypontjába esik. Innen Pitagorasz tételével ered a testmagasság hossza.



15. A megoldott tesztek száma: n.

Ekkor:

1. $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+97}{n}=90\ \Rightarrow\ x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+97=90n$

és

2. $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+73}{n}=87\ \Rightarrow\ x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+73=87n$.

Az 1. egyenletből kivonva a 2. egyenletet kapjuk: $97-73=90n-87n$ melyből ered, hogy a kitöltött tesztek száma $n=8$ db.

16. *a)* $x\in\mathbb{R}$

A feladat átfogalmazva: $|x+3|+|x-4|=10$.

Középszinten nem kötelező tudni e feladatot grafikusan megoldani, kezdjük hát algebrai úton.

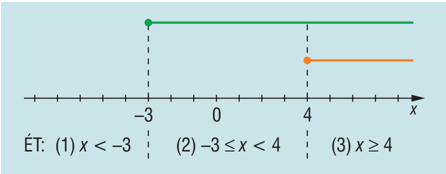
Ismert, hogy:

$$|x+3|=\begin{cases}x+3, & \text{ha } x\ge -3\\ -x-3, & \text{ha } x<-3\end{cases}$$

és

$$|x-4|=\begin{cases}x-4, & \text{ha } x\ge 4\\ -x+3, & \text{ha } x<4\end{cases}$$

Számegyenes segítségével könnyebben felírhatóak az értelmezési tartományok és a hozzájuk tartozó egyenletek.



1. esetben az $x<-3$ ÉT-on felírjuk a hozzá tartozó egyenletet, amely:

$$(-x-3)+(-x+4)=10,$$

melyből kapjuk: $x=-\dfrac{9}{2}$, ami az ÉT-nak megfelel.

2. esetben az ÉT: $-3\le x<4$, a hozzá tartozó egyenlet most így alakul:

$$(x+3)+(-x+4)=10,$$

amelyből $7\ne 10$, tehát nincs megoldás.

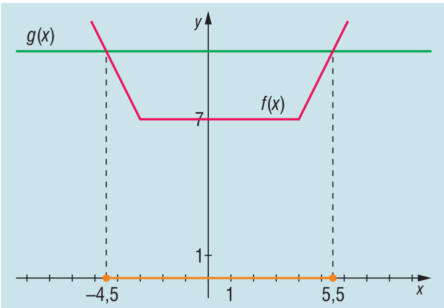
3. esetben az ÉT: $x\ge 4$, az egyenlet: $(x+3)+(x-4)=10$, az $x=5{,}5$ $\left(=\dfrac{11}{2}\right)$, amely szintén megfelel az ÉT-nak, ahogy 1. esetben kapott megoldás is.

A feladatnak tehát két megoldása van $-\dfrac{9}{2}$ és $\dfrac{11}{2}$.

Matematika fakultáción vagy emelt szintű matematikát tanulók oldják meg a feladatot függvények segítségével is.

Legyen $f(x)=|x+3|+|x-4|$ és $g(x)=10$ konstans függvény.

$$f(x)=|x+3|+|x-4|=\begin{cases}-2x+1, & \text{ha } x<-3\\ 7, & \text{ha } -3\le x<4\\ 2x-1, & \text{ha } x\ge 4\end{cases}$$



b) Kezdjük a feladatot a feladat ÉT-nak vizsgálatával.

A logaritmus miatt $x + 3 < 0$ és $x - 3 > 0$ és $x + 11 > 0$ egyenlőtlenségek metszeteként ered, hogy: $x > 3$ a feladat ÉT-a.

A logaritmusok összegére vonatkozó összefüggésből az egyenlet átírható a következő alakba:

$$\log_2[(x+3)(x-3)] = \log_2(x+11).$$

Mivel a log függvény szigorúan monoton (valamint felhasználva az $(a+b)(a-b) = = a^2 - b^2$ azonosságot) ered:

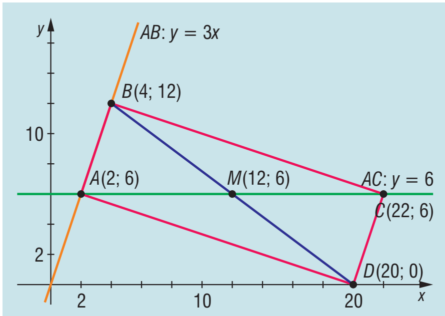
$$x^2 - 9 = x + 11$$

amely másodfokú egyenlet rendezés utáni gyökei: $x_1 = 5$ és $x_2 = -4$.

Az egyenletnek egy megoldása van, az $x = 5$, amely megfelel az ÉT-nak.

1. Feladatsor II. rész / B

17. *a)* Készítsünk előbb a koordináta-rendszerben rajzot!



AB egyenlete: $y = 3x$; az *AC* átló párhuzamos az *x* tengellyel, tehát mivel ez az egyenes áthalad az $M(12; 6)$ átló metszéspontkon, ezért $y = 6$ az egyenlete.

Készítsünk megoldástervet, majd lássunk hozzá a feladat megoldásához.

Terv:

1. $AC \cap AB = A$.
2. *C* kiszámítása felezőpont segítségével, hiszen *M* pont felezi *AC* átlót.
3. *BC* egyenletének felírása.
4. $BC \cap AB = B$.

Megjegyzés: emelt szintűek tehetik, hogy felírják *M* középpontú $r = AM$ sugarú Thalész-kört, majd e kör és *AB* egyenes metszetének egyik pontjaként kapják *B* pontot (másik metszéspont akkor éppen *A* pont).

5. *D* kiszámítása felezőpont segítségével, mert *M* pont felezi *BD* átlót.

Megoldás:

1.= $\left.\begin{array}{l} y = 6 \\ y = 3x \end{array}\right\} \Rightarrow A(2; 6)$

2. $C(22; 6)$
3. $\vec{n}_{AB} = \vec{v}_{BC}(3; -1)$; P_0: $C(22; 6) \Rightarrow BC$: $x + 3y = 40$
4. $B(4; 12)$
5. $D(20; 0)$

Megoldás: $A(2; 6)$, $B(4; 12)$, $C(22; 6)$, $D(20; 0)$.

b) Számítsuk ki először az *AD* távolságot!

$$d_{AD} = \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(d_1 - a_1)^2 + (d_2 - a_2)^2} = \sqrt{360} \approx 18{,}97$$

Mivel a feladat szövege szerint 1 egység 1 cm nagyságú, ezért $AD \approx 18{,}97$ cm. A valóságban 180 m = 18 000 cm, így a kicsinyítés mértéke kb. 1 : 949.

18. Készítsünk táblázatot!

	Lányok	Fiúk
Úszók: 80 fő	36	44
Atletizálók: 95 fő	19	76
Tornászok: 125 fő	85	40
Összesen: 300 fő	140	160

a) Jelentse A esemény, hogy a kiválasztott sportolók mindegyike lány.

$$P(A)=\frac{\binom{140}{3}}{\binom{300}{3}}\approx 0{,}1$$

b) Jelentse B esemény, hogy a kiválasztott 3 fő mindegyike atletizál.

$$P(B)=\frac{\binom{95}{3}}{\binom{300}{3}}\approx 0{,}03$$

c) Jelentse C esemény, hogy a kiválasztottak mindegyike atletizáló lány.

$$P(C)=\frac{\binom{19}{3}}{\binom{300}{3}}\approx 0{,}0002175$$

d) D esemény: A kiválasztott sportolók ugyanazt a sportágat űzik. Ekkor a kiválasztott 3 fő kikerülhet az úszók köréből, az atletizálók köréből vagy a tornászok köréből.

$$P(D)=\frac{\binom{80}{3}+\binom{95}{3}+\binom{125}{3}}{\binom{300}{3}}\approx 0{,}04973$$

19. Nézzünk először néhány adatot.
A januári alkalmazottak száma: 60 fő
A januári forgalom: 30 millió Ft
A januári 1 főre eső forgalom: 500 ezer Ft
Februárban a vállalat létszámemelkedését az $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ szorzó jelzi, akkor az 1 főre eső forgalomnövekedést az $\left(1+\frac{2p}{100}\right)$ kell, hogy jelezze.
Így a februári 15,5%-os összforgalom növekedés a következő egyenlettel írható fel:

$$34\,650\,000=500\,000\left(1+\frac{2p}{100}\right)\cdot 60\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

Mindkét oldalt osztjuk 10 000-rel, majd elvégezve a beszorzásokat és rendezve az egyenletet a

$$p^2 + 150p - 775 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk, melynek gyökei

$$p = 5 \text{ és } p = -155.$$

A megoldás a $p = 5$.

a) A vállalat 30 millió · 1,155 = 34 650 000 forgalmat bonyolított le.

b) Az egy főre eső forgalom februárban 10%-kal nőtt a januárihoz képest.

c) Februárban a vállalatnál 60 · 1,05 = 63 fő dolgozott.

Ellenőrizzük a feladatot!

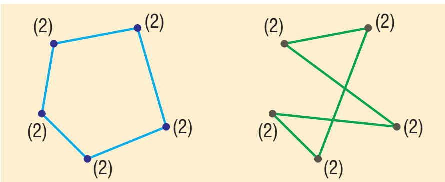
A februári 1 főre eső forgalom 500 000 · 1,1 = 550 000 Ft volt, ha ezt beszorozzuk a februárban ott dolgozók számával, tehát 63 fővel, akkor az egész februári forgalmat kell kapnunk. 550 000 · 63 = 34 650 000 Ft. Vagyis számolásunk helyes.

2. Feladatsor I. rész

1. Igen

2. Igen, pl. a lepkék.

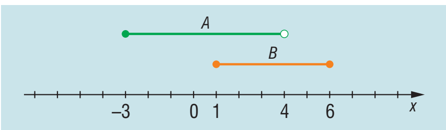
3. Két megoldást is adjunk.



4. Nem.

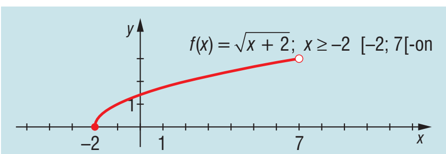
A 2003 páratlan, így két szám összegeként csak úgy írható fel, ha az egyik páros, a másik páratlan. A 2 az egyetlen páros prímszám, így a másik szám 2001 lenne, de a 2001 osztható 3-mal, így nem prím.

5. $A \cap B = [1; 4[$



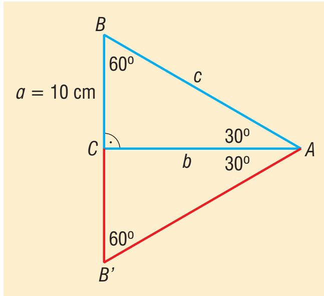
6. 11-féle lehet: 0 : 10; 1 : 9; 2 : 8; 3 : 7; 4 : 6; 5 : 5; 6 : 4; 7 : 3; 8 : 2; 9 : 1; 10 : 0.

7.



8. Egy tört értéke akkor pozitív, ha a számlálója és a nevezője egyforma előjelű. Mivel az adott tört számlálója 7, amely pozitív, ezért a nevező kizárólag pozitív lehet, ebből ered, hogy: $x < 7$. Megoldás $x < 7$ és $x \in \mathbb{N}$, tehát: $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

9. A köré írható kör sugara legyen: r.



Legegyszerűbb eljárás, ha a háromszöget tükrözzük az ábra szerint AC egyenesre, így szabályos háromszöget kapunk, amiből következik, hogy: $BB' = 20$ cm $= AB$. Thalész tétele miatt a háromszög köré írható kör középpontja az átfogó felezőpontjába esik, ezért $r = 10$ cm.

Megjegyzés: Természetesen szögfüggvényes megoldás szintén tökéletes. Ekkor

$$\sin 30^\circ = \frac{10}{2r} \Rightarrow r = 10 \text{ cm}.$$

10. Formáljuk egy kicsit az adott egyenletet:

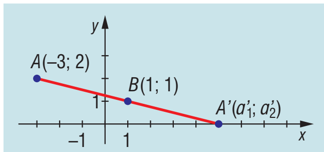
$$\sqrt{(10+8)(10-8)} = 3 \cdot \sqrt[n]{2^5},$$

amiből

$$\sqrt{3^2 \cdot 2^2} = 3 \cdot 2^{\frac{5}{n}},$$

osztva mindkét oldalt 3-mal, kapjuk a megoldást: $n = 5$.

11. Tükrözzük $A(-3; 2)$ pontot $B(1; 1)$ pontra, az így kapott A' pont koordinátáit felezőpont számításra vonatkozó összefüggéssel kapjuk: $A'(5; 0)$.

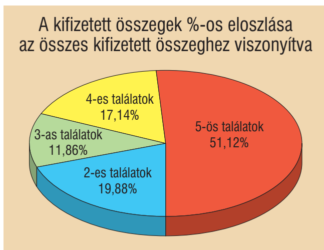


12. A $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ összefüggés alkalmazása után kapjuk, hogy $|\sin\alpha| = \frac{4}{5}$.

Mivel α tompaszög, vagyis $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, ezért tudjuk, hogy a II. negyedben az adott szöveg szinusza pozitív, vagyis csak a $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ a helyes megoldás, a $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ nem felel meg a feladat feltételének.

2. Feladatsor II. rész / A

13. *a)* 5-ös: 51,12% hozzá tartozó középponti szög ≈ 184°.
4-es: 17,14% hozzá tartozó középponti szög ≈ 62°.
3-as: 11,86% hozzá tartozó középponti szög ≈ 43°.
2-es: 19,88% hozzá tartozó középponti szög ≈ 71°.
Célszerű kördiagramon ábrázolni a kért eloszlást.



b) Átlagot a tanultakat alkalmazva számolunk, de figyelem *nyertes* szelvényeknél!

$$\frac{1 \cdot 5 + 31 \cdot 4 + 2127 \cdot 3 + 48359 \cdot 2}{1 + 31 + 2127 + 48359} \approx 2{,}04$$

c) A nyertes szelvényekért egyenként (5-ös találatokért, 4-es találatokért, ...) kifizetett összegek átlagát számoljuk:

$$\frac{120\,000\,000 + 40\,235\,055 + 27\,831\,795 + 46\,666\,435}{1 + 31 + 2127 + 48\,359} \approx 4647 \text{ Ft.}$$

14. *a)* Lakott területen egyenesarányossággal számítható, hogy a 40 l benzin 425,53 km-re elegendő.

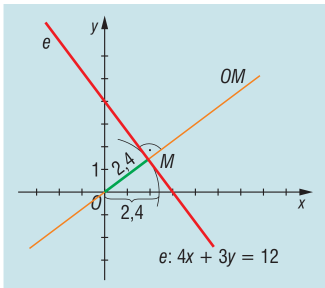
b) Számítsuk ki először, hogy városban, ill. országúton 1 km-re mennyi liter benzin szükséges. Lakott területen 1 km-en 9,4 : 100 = 0,094 l; országúton 1 km-en: 7,2 : 100 = = 0,072 l benzint fogyasztunk.

Mivel az út $\frac{1}{5}$ részét lakott területen, $\frac{4}{5}$ részét országúton tesszük meg, ezért 1 km-re szükséges $\frac{1}{5}\cdot 0{,}094 + \frac{4}{5}\cdot 0{,}072$ l benzin, vagyis 0,0764 l. Ekkor egyenes arányossággal számítható, hogy 40 l benzin kb. 523,56 km-re elegendő.

Megjegyzés: Felírható 3 egyenletből álló egyenletrendszer, ennek megoldásaként is megkapható a keresett út hossza.

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \dfrac{100}{0{,}2x} = \dfrac{9{,}4}{y_1} \\[2ex] (2) & \dfrac{100}{0{,}8x} = \dfrac{7{,}2}{y_2} \\[2ex] (3) & y_1 + y_2 = 40 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x\text{: a keresett út hossza,} \\ y_1\text{: városban a fogyasztás,} \\ y_2\text{: országúti fogyasztás.} \end{array}$$

15. Pont-egyenes távolságán értjük: Az adott ponttól az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hosszát.



Tervezzük először el a feladat megoldását, majd csak utána számoljunk.

Terv:

1. Felírjuk a pontból (O) az egyenesre bocsátott merőleges egyenes egyenletét (OM).
2. Az eredeti egyenes és a rá merőleges egyenes metszéspontját kiszámoljuk a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer segítségével (M).
3. Számoljuk az OM távolságot.

Számoljunk!

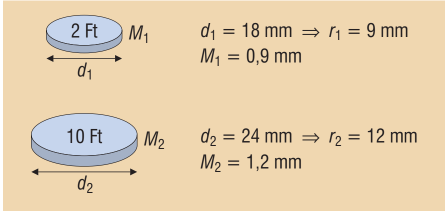
1. $\vec{n}_e(4; 3) = \vec{v}_{OM}(4; 3)$; P_0: $O(0; 0)$; OM: $3x - 4y = 0$.
2. $OM \cap e = M$

$$\left.\begin{array}{rl} e\text{:} & 4x + 3y = 12 \\ OM\text{:} & 3x - 4y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{48}{25}; \frac{36}{25}\right)$$

3. $d_{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{\left(\frac{48}{25}\right)^2 + \left(\frac{36}{25}\right)^2} = \frac{60}{25} = 2{,}4$

Megjegyzés: Ábrázolás után ellenőrizzünk! Vegyük körzőnyílásba az OM szakaszt és metsszük el pl. az abszcisszatengely pozitív felét OM szakasz hosszával. Valóban 2,4 hosszú.

16. Rajzoljunk és gyűjtsük ki az adatokat!



Felírjuk a két érme térfogatát, $V_1 = r_1^2 \cdot \pi \cdot M_1 = 72{,}9\pi$ és $V_2 = r_2^2 \cdot \pi \cdot M_2 = 172{,}8\pi$, majd a $\rho = \dfrac{m}{V}$ összefüggésbe helyettesítve, s abból a tömegeket (m_1; m_2) kifejezve kapjuk: $m_1 = \rho \cdot 72{,}9\pi$ és $m_2 = \rho \cdot 172{,}8\pi$. Egyenesarányossággal ered, hogy $\dfrac{\rho \cdot 172{,}8\pi}{\rho \cdot 72{,}9\pi} = 2{,}37$-szer értékesebb a 10 Ft-os a 2 Ft-osnál.

2. Feladatsor II. rész / B

17. Jelölje x a piros, y a kék golyók számát a dobozban.
A feladat szövege szerint klasszikus valószínűséggel felírhatóak a következő egyenletek:

$$P(A) = \frac{x}{x+y} = \frac{4}{10},$$

vagyis

$$(1)\quad \frac{x}{x+y} = \frac{2}{5} \quad \text{és} \quad (2)\quad \frac{x}{x+y+10} = \frac{1}{3}.$$

A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldásából ered:

a) $x = 20$ db piros és $y = 30$ db kék golyó van a dobozban.

b) Annak, hogy az első húzásra kék golyót húzzunk a valószínűsége $\dfrac{30}{50}$, hogy a második húzáskor szintén kék golyót húzzunk $\dfrac{29}{49}$, ...

Így mivel a 4 húzás egymástól független esemény

$$P(\text{mind a 4 golyó kék}) = \frac{30}{50} \cdot \frac{29}{49} \cdot \frac{28}{48} \cdot \frac{27}{47} \approx 0{,}11899.$$

Egyszerűbben felírva:

$$\frac{\binom{30}{4}}{\binom{50}{4}} \approx 0{,}11899.$$

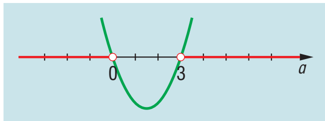
c) Mind a 4 húzásnál a kék golyó húzásának valószínűsége: $\dfrac{30}{50} = \dfrac{3}{5}$.

Így

$$P(\text{mind a 4 golyó kék, visszatevéssel}) = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625} \approx 0{,}1296.$$

18. *a)* Vizsgáljuk az a paramétert:
$a \neq 0$, mert ha 0 lenne, akkor $f(x) = 3$ konstans függvény, s így nem értelmeznénk az érintés fogalmát.
Mivel $a \neq 0$, az $f(x)$ másodfokú függvény képe parabola, s akkor érinti az x tengelyt, ha a diszkrimináns $(D) = 0$.
$D = b^2 - 4ac = 0$ egyenletet megoldva kapjuk, hogy $a_1 = 0$ és $a_2 = 3$, vagyis csak $a = 3$ lesz a megoldás.
Ellenőrizzünk!
$a = 3$ esetén $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$, melyet teljes négyzetté alakítva kapjuk: $f(x) = 3(x - 1)^2$, amely valóban érinti az x tengelyt, mégpedig az $x = 1$ pontban.

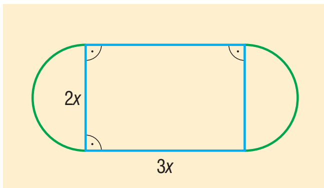
b) Két zérushelye van a másodfokú függvénynek, ha a diszkrimináns pozitív, tehát: $D = b^2 - 4ac > 0$, itt $4a^2 - 12a > 0$.
Tekintsük előbb $4a^2 - 12a$ zérushelyeit, amely $a = 0$ és $a = 3$. Ábrázolva a parabolát, leolvassuk az egyenlőtlenség megoldását. Tehát $a < 0$ vagy $a > 3$.
Az $f(x)$ függvénynek két zérushelye van ha $a \in \,]-\infty; 0[\, \cup \,]3; \infty[$.



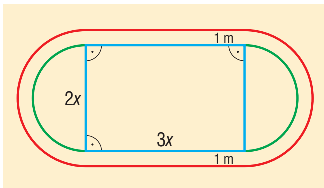
c) A másodfokú függvénynek akkor van maximuma, ha lefelé nyíló a parabola képe, ez akkor lesz, ha az x^2 együtthatója negatív szám. Vagyis $a < 0$ esetén.
Megjegyzés: Emelt szintűek válaszolják meg azt a kérdést is, hol veszi fel a parabola a maximumát és melyik ez a maximum.
Segítségként: $f(x)$ teljes négyzetté alakítása után a kérdésekre a válasz leolvasható.
$f(x) = a(x - 1)^2 - a + 3$, tehát $x = 1$ helyen lesz a függvénynek maximuma $a < 0$ esetén, s ez az érték $3 - a$ lesz.

19. Rajzoljunk!

a) Vegyük észre, hogy az így kapott futópálya teljes hossza a téglalap két hosszabb oldala + a két félkör kerülete (1 kör kerülete).
Ezért felírható a $400 = 2x\pi + 6x$ egyenlet, melyből $x \approx 32{,}56$ m.
A futópálya két egyenes szakasza egyenként 97,7 m.



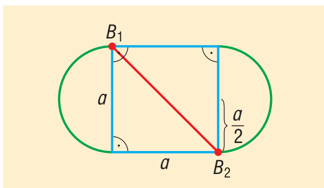
b) Ismét kezdjük előbb rajzolással az adatfelvételt. A nagyobb félkör sugara: $x + 1$.
A második futópálya hossza: $2(x + 1)\pi + 6x$.
Helyettesítsük ebbe a képletbe az *a)* feladatban kapott $x = 32{,}56$ m-t, kapjuk, hogy: 406,223 m.
Innen ered, hogy a külső íven futó versenyzőnek 6,2 m előnyt kell adni.



c) A téglalap átlója minimális, ha a téglalap négyzet.
Vagyis az ábra alapján most:

$$400 = 2a + 2 \cdot \frac{a}{2}\pi, \quad \text{amiből} \quad a \approx 77{,}79 \text{ m.}$$

Tehát a négyzet oldala kb. 77,8 m kell hogy legyen, hogy a két bíró a lehető legközelebb álljon egymáshoz.



3. Feladatsor I. rész

1. Egy szám osztható 6-tal, ha páros és számjegyeinek összege osztható 3-mal. Ez a szám 999 996.

2. Ez a sorozat egy olyan számtani sorozat, melynek első tagja is 7 és a differenciája is 7. $a_{3000} = a_1 + 2999 \cdot d = 21\,000$.

3. Készítsünk táblázatot!

1024 2^{10}	512 2^9	256 2^8	128 2^7	64 2^6	32 2^5	16 2^4	8 2^3	4 2^2	2 2^1	1 2^0
1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1

$2005_{10} = 11111010101_2$ 3 db 0-t tartalmaz.

4. Írjuk fel a kérdést egyenletként!

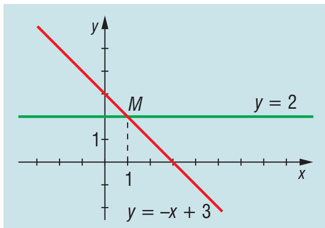
$$2^{30} \cdot \frac{25}{100} = 4^x,$$

egyszerűsítve:

$$2^{30} \cdot \frac{1}{4} = 2^{2x}.$$

Átalakítások után $x = 14$ ($x \in \mathbb{R}$). Tehát ez a megoldás.

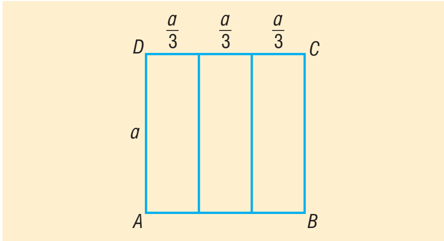
5. Írjuk fel a két adott egyenletet függvényként!
Tehát $x + y = 3 \Rightarrow y = -x + 3$,
és $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$.
Leolvasva a két függvény metszéspontjának $(x; y)$ koordinátáit, kapjuk az adott egyenletrendszer x és y megoldásait.
Az egyenletrendszer megoldása: $x = 1$ és $y = 2$.



6. Adott a keresett másodfokú egyenlet két gyöke $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Legegyszerűbb ha a gyöktényezős alakot használjuk a keresett egyenlet felírásához: $a(x - x_1)(x - x_2)$, ahol $a = 1$.
Így: $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = 0$ az egyik felírása a keresett egyenletnek.
Illetve a szorzásokat elvégezve, rendezve kapjuk a 2. megoldást: $6x^2 - x - 1 = 0$ egyenletet.

7. Készítsünk ábrát, majd az ábra jelöléseit használva számoljunk!

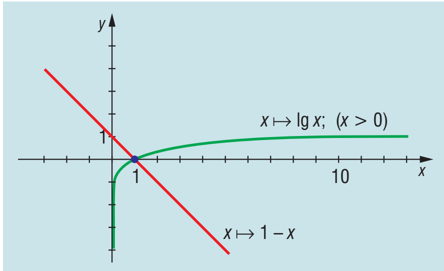


Egy téglalap kerülete 8 cm, tehát a

$$2 \cdot a + 2 \cdot \frac{a}{3} = 8$$

egyenletből kapjuk: a = 3 cm; így az eredeti négyzet területe $a^2 = 9$ cm^2.

8. $\lg x = 1 - x$ ($x > 0$) grafikus megoldásához jelöljük $f(x) = \lg x$ ($x > 0$) és $g(x) = 1 - x$ függvényeket egy koordináta-rendszerbe.



Az ábráról leolvasható, hogy a 2 függvénynek egy közös pontja (metszéspontja) van $x = 1$ helyen.

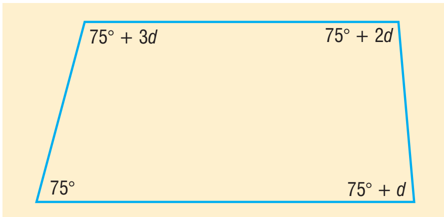
Ellenőrizzünk!

$f(x) = \lg x$ esetén: $f(1) = \lg 1 = \lg 10^0 = 0$.

$g(x) = 1 - x$ esetén: $g(1) = 1 - 1 = 0$.

Helyes a megoldás.

9. Készítsünk ábrát!

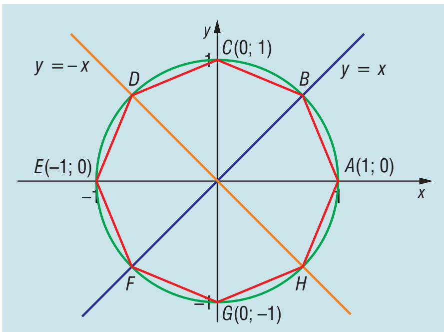


A négyszög belső szögeinek összege 360º. Így a négy szög összesen: $300^\circ + 6d = 360^\circ$, amiből $d = 10^\circ$.

A számtani sorozat szerinti szögek sorban: 75º; 85º; 95º; 105º.

Legnagyobb szöge 105º-os.

10. A szabályos nyolcszög többi csúcsát az $O(0; 0)$ középpontú $r = 1$ sugarú kör és az $y = x$, valamint $y = -x$ egyenesek metszéspontjai adják. (lásd ábra)



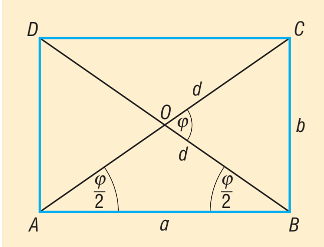
Az $x^2 + y^2 = 1$ kör és $y = x$ egyenes metszéspontjai adják $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ valamint $F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ csúcsokat. További csúcsok $D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ és $H\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. A másik 3 csúcs ($C$; E; G) ráesnek az x vagy y tengelyekre, így azok pontja könnyen előállnak.

A nyolcszög csúcspontjai tehát: $A(1; 0)$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C(0; 1)$, $D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $E(-1; 0)$, $F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $G(0; -1)$, $H\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

11. A tört egyszerűsítéséhez használjuk fel a számláló és a nevező esetében a gyöktényezős alakot $[a(x-x_1)(x-x_2)]$.

$$\frac{x^2-2x-35}{x^2-12x+35}=\frac{(x-7)(x+5)}{(x-7)(x-5)}=\frac{x+5}{x-5}\quad (\text{ÉT: } x\neq 7;\ x\neq 5)$$

12. Rajzoljunk!



A kerület kifejezésénél szögfüggvény segítségével kifejezzük az a, b oldalakat, így $a=d\cdot\sin\frac{\varphi}{2}$ és $b=d\cdot\cos\frac{\varphi}{2}$.

$$K=2\left(d\cdot\sin\frac{\varphi}{2}+d\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\right)=2d\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Ha egy paralelogramma két átlója e és f, akkor belátható, hogy $T=\frac{e\cdot f\cdot\sin\varphi}{2}$, ha a két átló által bezárt szög φ. (lásd 10. o. tk., 226. old.)

A téglalap paralelogramma, így:

$$T=\frac{d\cdot d\cdot\sin\varphi}{2}=\frac{d^2\cdot\sin\varphi}{2}.$$

Megjegyzés: Emelt szinten tanulók használhatják a $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ összefüggést a terület kifejezésénél, vagyis:

$$T=a\cdot b=d\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\cdot d\cdot\cos\frac{\varphi}{2}=d^2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=d^2\cdot\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2}=\frac{d^2\cdot\sin\varphi}{2}.$$

Alapszinten használjuk a $T_\triangle=\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}$ összefüggést.

$$T=2\cdot T_{BOC_\triangle}+2\cdot T_{AOB_\triangle}=2\cdot\frac{\frac{d}{2}\cdot\frac{d}{2}\cdot\sin\varphi}{2}+2\cdot\frac{\frac{d}{2}\cdot\frac{d}{2}\cdot\sin(180^\circ-\varphi)}{2}=$$

A II. negyedben a szög szinusza pozitív, így $\sin(180^\circ-\varphi)=\sin\varphi$.

$$=\frac{d^2}{4}\cdot\sin\varphi+\frac{d^2}{4}\cdot\sin\varphi=\frac{2d^2\cdot\sin\varphi}{4}=\frac{d^2\cdot\sin\varphi}{2}$$

3. Feladatsor II. rész / A

13. $x; y>0$. A feladat feltételei szerint 2 egyenlet írható fel:

$$(1)\qquad x-y=24\quad (x>y)$$

$$(2)\qquad \frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=4.$$

A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldásaiból ered: $x=32$ és $y=8$ számpár.

14. Az együttes munkavégzéses feladatot az eddig tanultak alapján oldjuk. Ha az Apa t idő alatt $\frac{t}{5}$ részét végzi el a munkának, akkor a feladat feltétele miatt a fiai külön-külön 8 óra alatt végzik el a munkát. Így felírható a következő egyenlet:

$$\frac{t}{5}+\frac{\frac{2}{3}}{8}+\frac{t-\frac{1}{6}}{8}=1,$$

amelynek eredménye

$$t=\frac{225}{78}=2\frac{69}{78}\text{ h.}$$

Vagyis $t = 2{,}88$ h alatt végzik el a takarítást együtt.
Kicsit egyszerűbben megoldható a feladat, ha csak percekben táblázatban adjuk meg az adatokat.

	Apa	**Gyerek1**	**Gyerek2**
Első 40 perc alatt	$40\cdot\frac{1}{300}$	$40\cdot\frac{1}{480}$	$40\cdot\frac{1}{480}$
Következő 10 percben	$10\cdot\frac{1}{300}$	–	–
Következő *x* percben	$x\cdot\frac{1}{300}$	$x\cdot\frac{1}{480}$	–

Így az egyenlet:

$$\frac{40}{300}+\frac{40}{480}+\frac{40}{480}+\frac{10}{300}+\frac{x}{300}+\frac{x}{480}=1,$$

ebből $x = 123$ perc.
Összesen: $40 + 10 + 123$ (perc) $= 173$ perc $= 2{,}88$ h.

15. Az átlagszámításra vonatkozó összefüggés alapján a következő egyenletek írhatóak fel a táblázat alapján:

$$\begin{array}{ll}
(1) & 71n = 81n = 89(n+m) \\
(2) & 71n = 76l = 74(n+l) \\
(3) & 81m+90k = 84(m+k) \\
\hline
 & 76l+90k = \,?
\end{array}$$

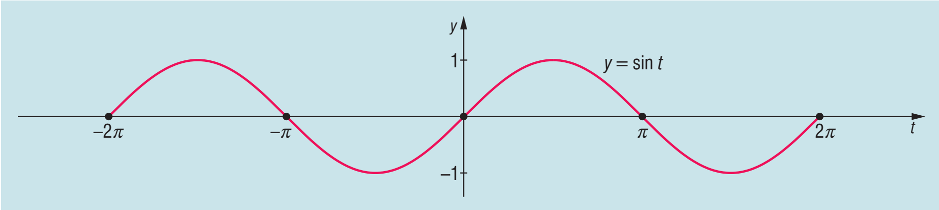
Ahol n: az A iskolában a fiúk száma
m: a B iskolában a fiúk száma
l: az A iskolában a lányok száma
k: a B iskolában a lányok száma

Keressük az l és k közötti összefüggést!
A három egyenletből álló egyenletrendszer segítségével kifejezhető: $l=\frac{3}{4}k$.

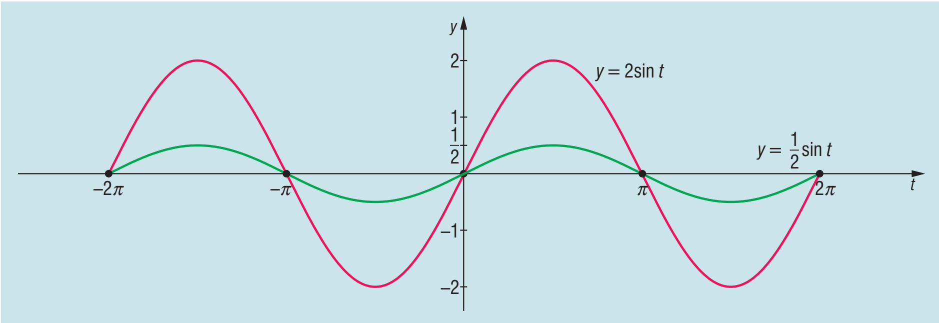
Így: $\dfrac{76l+90k}{k+l}=\dfrac{147k}{\frac{7}{4}k}=84.$

A táblázatba a ? helyére 84 pontszám átlag kerül.

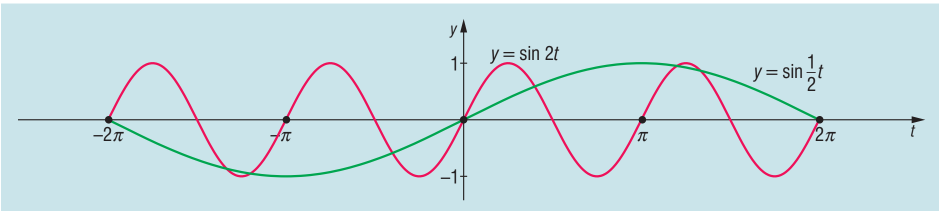
16. *a)* $y = \sin t$ harmonikus rezgőmozgás $(-2\pi \le t \le 2\pi)$.



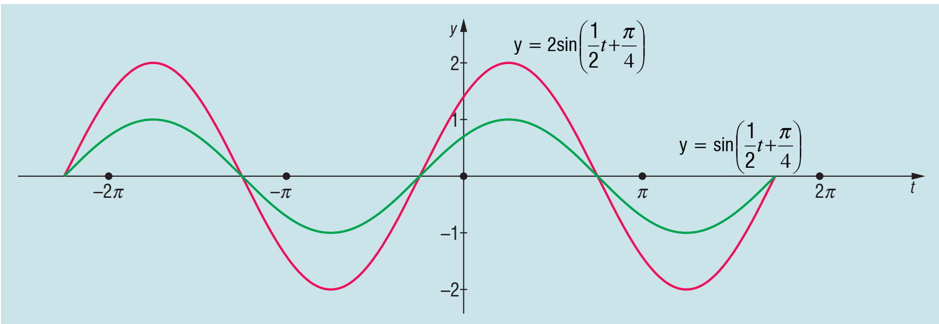
b) $y = A \cdot \sin t$ $(A > 0)$ $[-2\pi;\ 2\pi]$-on.



c) $y = \sin \omega t$ $(\omega > 0)$ $[-2\pi;\ 2\pi]$-on.



d) $y = 2\sin\left(\dfrac{1}{2}t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ $[-2\pi;\ 2\pi]$-on.



3. Feladatsor II. rész / B

17. Aladár, Béla, Csaba, Dani és Ernő mind az öten 2-féle nevet írhatnak a cédulára, mert a különböző válaszok egyforma valószínűséggel fordulnak elő, nem tehetjük fel, hogy Aladár magára és Béla magára szavaz.

a) Így az összes lehetőség száma: $2^5 = 32$-féle lehet a szavazás eredménye. (Igazoljuk gráffal!)

b) Alkalmazzuk a klasszikus valószínűségszámítást így a kedvező esetek száma ebben az esetben fele az összes esetnek.

$$P(\text{a gép Aladárnál lesz}) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} = 50\%$$

c) Mivel itt már mind az öt fiú 3 nevet írhat a papírra, ezért $3^5 = 243$-féle eredmény lehet, hiszen a korábbiakkal azonos feltételek mellett szavaznak újra a fiúk.

d) A klorikus valószínűség összes esetét a *c)* feladat tartalmazza, a kérdés már csak a kedvező esetek száma. Ha pontosan 4 fiú Csabára szavaz, akkor pontosan 1 nem Csabára, akkor az az egy szavazhat Bélára vagy Aladárra, így $5 \cdot 2 = 10$ a kedvező esetek száma $\left(\binom{5}{4} \cdot 2\right)$.

$$P(\text{pontosan 4-en szavaznak Csabára}) = \frac{10}{243} \approx 0{,}041$$

Megjegyzés: Igazoljuk *d)* kedvező eseteit gráffal.

$$\begin{array}{lccccc}
 & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{Cs} & \mathbf{D} & \mathbf{E} \\
\text{szavazat:} & \text{Cs} - \text{Cs} - \text{Cs} - \text{Cs} \left\langle \begin{matrix}\text{A}\\\text{B}\end{matrix} \right. & & & & \text{2 eset} \\
\text{szavazat:} & \text{Cs} \left\langle \begin{matrix}\text{A}\\\text{B}\end{matrix} \right\rangle \text{Cs} - \text{Cs} - \text{Cs} & & & & \text{2 eset} \\
 & \text{Cs} - \text{Cs} - \text{Cs} \left\langle \begin{matrix}\text{A}\\\text{B}\end{matrix} \right\rangle \text{Cs} & & & & \text{2 eset} \\
 & \text{Cs} - \text{Cs} \left\langle \begin{matrix}\text{A}\\\text{B}\end{matrix} \right\rangle \text{Cs} - \text{Cs} & & & & \text{2 eset} \\
 & \left. \begin{matrix}\text{A}\\\text{B}\end{matrix} \right\rangle \text{Cs} - \text{Cs} - \text{Cs} - \text{Cs} & & & & \text{2 eset}
\end{array}$$

18. *A*: $\lg(x+1) < \lg(3x+8) - \lg x$ egyenletet kezdjük az ÉT vizsgálattal:

$$x+1>0 \ (x>-1) \ \text{ és } \ 3x+8>0 \ \left(x>-\frac{8}{3}\right) \ \text{ és } \ x>0$$

eredményeként a feladat ÉT-a: $x > 0$.

A logaritmusok kivonására vonatkozó összefüggés alapján, ill. a log függvény szigorú monotonitása miatt:

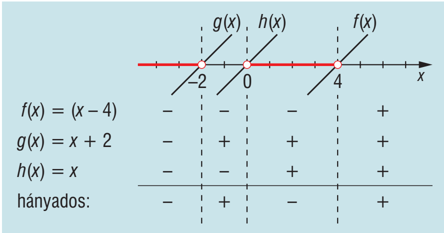
$$x+1 < \frac{3x+8}{x},$$

amely egyenlőtlenség átrendezés, összevonás majd a számláló szorzattá alakítása (gyöktényezős alak segítségével) után

$$\frac{(x-4)(x+2)}{x}<0$$

alakban írható, ahol előjel vizsgálatot tartva a következőket kapjuk:

Legyen: $f(x)=x-4$, zérushelye: $x=4$,
$g(x)=x+2$, zérushelye: $x=-2$,
$h(x)=x$, zérushelye: $x=0$.



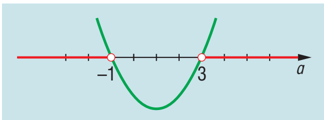
$x<-2$ vagy $0<x<4$, de az értelmezési tartomány miatt e feladat megoldása: $x\in\,]0;\,4[$.

B: $3x\ge 2+3^{1-x}$ átalakítható

$$3^x\ge 2+\frac{3}{3^x}$$

alakban, ahol $3x = a$ jelölve, s mivel $3x > 0$; ezért $a^2 \ge 2a + 3$ vagyis $a^2 - 2a - 3 \ge 0$ egyenlőtlenség a megoldandó.

Segítségül vesszük az $a^2-2a-3=0$ egyenlet zérushelyeit, amelyek $a_1=3$ és $a_2=-1$, ezért a másodfokú parabola eként ábrázolható:



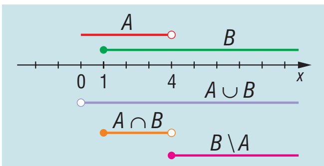
$a = 3^x$-et helyettesítve: $3^x \le 1$ vagy $3^x \ge 3$, ahol csak az utóbbi egyenlőtlenségnek van megoldása: $x\ge 1$.

B megoldása: $x\in[1;\,\infty[$.

a) $A = \,]0;\,4[$,
$B=[1;\,\infty[$.

b) $A\cup B=\,]0;\,\infty[$,
$A\cap B=[1;\,4[$.

c) $B\setminus A=[4;\,\infty[$.



19. Írjuk ki az adatokat!

a) $m_0 = 8$ mg
$t = 6$ perc

$T = ?$

Az adott összefüggésbe behelyettesítve:

$$\underbrace{m(6)}_{2\text{ mg}}=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6}{T}},\quad \text{amiből}\ \ T=3\ \text{perc.}$$

b) $T = 15$ év
$m(t) = 3$ g
$t = 30$ év

$m_0 = ?$

$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ -be helyettesítve:

$$3 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30}{15}}, \text{ amiből } m_0 = 12 \text{ g.}$$

c) Gyűjtsük össze a két radioaktív anyagról tudottakat:

radioaktív anyag1

$T = T_1$
$m_0 = M_1$
$m(t) = m(t)$

$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

$m(t) = M_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_1}}$

radioaktív anyag2

$T = T_2 = ?$
$m_0 = M_2$
$m(t) = m(t)$

$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

$m(t) = M_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_2}}$

A két egyenlet a feltételek miatt egyenlő, így:

$$M_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_1}} = M_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_2}},$$

átrendezés után:

$$\frac{M_1}{M_2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_2} - \frac{t}{T_1}}.$$

Vegyük mindkét oldal 0,5 alapú logaritmusát:

$$\log_{0,5}\left(\frac{M_1}{M_2}\right) = \left(\frac{t}{T_2} - \frac{t}{T_1}\right) \cdot \underbrace{\log_{0,5} 0,5}_{1},$$

átrendezve:

$$T_2 \cdot \left[\log_{0,5}\left(\frac{M_1}{M_2}\right) + \frac{t}{T_1}\right] = t,$$

tehát:

$$T_2 = \frac{t}{\log_{0,5}\left(\frac{M_1}{M_2}\right) + \frac{t}{T_1}}.$$

4. Feladatsor I. rész

1. Az osztást elvégezve: 1 : 7 = 0,142857..., ezután a maradék újra 1 lesz, így ismétlődnek a számjegyek. A szakaszos tizedestört szakasza 6 jegyből áll. (1 pont)

A 2005 1 maradékot ad 6-tal osztva, így a tizedesvessző utáni 2005-ödik számjegy az 1. (1 pont)

2. A pálca és az árnyéka által meghatározott derékszögű háromszög hasonló a torony és az árnyéka által meghatározott derékszögű háromszöghöz. (1 pont)

Így a torony magassága: $m = 15 \cdot \frac{1}{0{,}75} = 15 \cdot \frac{4}{3} = 20.$ Tehát a torony 20 m magas. (1 pont)

3. Ránézésre adódik a * = 3 megoldás, hiszen $\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{1}{15}$. (1 pont)

Azonban az egyenletnek van más megoldása is. Átrendezve a $3*^2 + * - 30 = 0$ egyenlethez jutunk, melynek a megoldóképlet alapján két megoldása van: $*_1 = 3$ és $*_2 = -\frac{10}{3}$. Ezek valóban megoldásai az eredeti egyenletnek, hiszen $* \neq 0$. Tehát a * helyére írható számok halmaza $\left\{3; -\frac{10}{3}\right\}$. (2 pont)

Természetesen a 3 pont akkor is jár, ha rögtön a másodfokú egyenlet megoldásával kezd és kapja meg a * = 3 megoldást is.)

4. Az 1. lámpának megfelelő sávban haladó járművek csak az 5. sávban haladókat akadályozzák, így az 1. lámpa csak azért piros, hogy az 5. lámpa zöld lehessen. (1 pont)

Ekkor a 2. és 3. lámpa szintén piros kell legyen, viszont a 4. és a 6. lehet zöld. (1 pont)

5. A hatványozás azonosságait alkalmazva: $z = (2a)^{2b} = 2^{2b} \cdot a^{2b} = (2^2)^b \cdot a^b \cdot a^b = (4a)^b \cdot a^b$. (2 pont)

Ebből $x = 4a$. (1 pont)

6. Ha mindegyik szám ugyanannyival nő (vagy csökken), az átlaguk is annyival nő (vagy csökken), így az első lépés után 22 lesz. (1 pont)

Mivel mindegyik számot megszoroztuk 4-gyel, az átlaguk is 4-szeres lett, azaz 88. Ezután mindegyik számot csökkentettük 10-zel, az átlaguk is 10-zel csökkent, így végül 78 lett. (1 pont)

(Számolhattunk volna végig az öt szám összegével, de mivel a számok száma nem változott, mindegyikkel ugyanazt csináltuk, ezért a fenti megoldás is megfelelő.)

7. A tank 0,7 részének és $\frac{1}{4} = 0{,}25$ részének különbsége, azaz a 0,45 része 18 liter. (1 pont)

Ekkor a tank $\frac{18}{0{,}45} = 40$ liter. Tehát az autó tankja 40 literes. (1 pont)

8. A körök helyzete miatt mindkét kör sugara 12 cm. Az *ABC* és az *ABD* háromszögek egyenlő oldalúak, így a $CAD\sphericalangle = CBD\sphericalangle = 120°$. (1 pont)

A teljes szög 360°, és a körív hossza arányos a középponti szöggel, ezért a vastag vonallal jelzett út a 12 cm sugarú kör kerületének $\frac{4}{3}$ része, azaz $\frac{4}{3} \cdot 2 \cdot 12\pi = 32\pi \approx 100{,}53$ cm. (1 pont)

9. Mivel minden lehetőség egyformán valószínű, klasszikus valószínűségi modellről van szó, amikor a valószínűség a kedvező és az összes eset számának hányadosa. A 6 · 3 = 18 versenyző versenyző közül az első három helyezettet a sorrend figyelembe vétele nélkül $\binom{18}{3}$ féleképpen választhatjuk ki, ennyi az összes eset. (1 pont)

Kedvező, ha mind a három dobogós egy iskolából jött, 6 iskola van, ezért ez 6 féleképpen lehetséges. (1 pont)

Tehát a keresett valószínűség: $\frac{6}{\binom{18}{3}} = \frac{1}{136} \approx 0{,}007.$ (1 pont)

Megjegyzés: Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a kedvező és az összes eset számolásánál is figyelembe vesszük a sorrendet, ekkor a valószínűséget a következőképpen írhatjuk fel: $\frac{6 \cdot 3!}{18 \cdot 17 \cdot 16}$.

10. Az uszoda hosszának 90-szerese 3 km, így az uszoda hossza $3000 : 90 = 33{,}\dot{3}$ m. (1 pont)

A kerülete 3000 : 25 = 120 m, két szomszédos oldalának összege a kerület fele: 60 m, így a medence szélessége $60 - 33{,}\dot{3} = 26{,}\dot{6}$ m. (1 pont)

A területe $26{,}\dot{6} \cdot 33{,}\dot{3} \approx 888{,}91$ m^2. Tehát a medence területe közelítőleg 889 m^2. (1 pont)

11. A négyzetre emelést elvégezve a következőt kapjuk: $10^{8n^2+16} + 2 \cdot 10^{4n^2+8} + 1$. (1 pont)

Ebben két darab 1-es és egy darab 2-es számjegy szerepel, azaz a számjegyek összege 4. (2 pont)

12. Mivel mindegyik háromjegyű számot ugyanakkora eséllyel választhatjuk, klasszikus valószínűségi modellről van szó.

Háromjegyű szám 999 – 99 = 900 darab van, ennyi az összes lehetőség. (1 pont)

Ahhoz, hogy $\log_2 N$ egész szám legyen, N a 2 valamely egész kitevős hatványa kell legyen. A 2 hatványok közül a háromjegyűek: 128, 256, 512. (1 pont)

Tehát a keresett valószínűség: $\frac{3}{900} = \frac{1}{300}$. (1 pont)

4. Feladatsor II. rész / A

13. *a)* Ha x a kiírt ár, 10% engedmény után $0{,}9x$ lesz. (2 pont)

A 900 forintos áru 20% haszonnal 1,2 · 900 = 1080 Ft. (2 pont)

Ezek egyenlőségéből $x = \frac{1080}{0{,}9} = 1200$ Ft. Tehát a kereskedőnek 1200 Ft-os árat kell kiírni. (2 pont)

b) A háromszori csökkenés után az ár: 1200 · 0,9 · 0,9 · 0,9 = 1200 · 0,729 = 874,8 Ft. (3 pont)

Ez az eredeti ár 0,9 · 0,9 · 0,9 = 0,729 része, azaz 72,9%-a. (3 pont)

14. *a)* Átalakítva az egyenletet: $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2 - \sqrt[5]{x} - 2 = 0$. $\sqrt[5]{x} = a$ jelöléssel az egyenlet: $a^2 - a - 2 = 0$, a megoldóképlet alapján $a_1 = 2$ és $a_2 = -1$. (3 pont)
Ebből $x_1 = 2^5 = 32$ és $x_2 = (-1)^5 = -1$. Az egyenlet megoldásai tehát a 32 és a -1. (2 pont)

b) A második egyenlet 2-szerese: $6x + 6y = 12xy$. Így $xy = 1$. (2 pont)
Az első egyenletből $x + y = 2$, amiből $y = 2 - x$. (2 pont)
Az $xy = 1$ egyenletbe behelyettesítve: $x(2 - x) = 1$, azaz $x^2 - 2x + 1 = 0$, másképp $(x - 1)^2 = 0$, aminek egy megoldása az $x = 1$. (2 pont)
Ekkor $y = 2 - 1 = 1$.
Tehát az egyenletrendszer megoldása $x = 1$ és $y = 1$. (1 pont)

15. *a)* Mivel *E* és *F* harmadolópontok, $DE = EF = FC$, így az *ADE*, *AEF*, *AFC* háromszögek területe egyenlő, hiszen magasságuk ugyanaz. Hasonlóképpen *G*, *H* harmadolópontok, így $AG = GH = HB$, az *ACG*, *GCH*, *HCB* háromszögek területe egyenlő, mert magasságuk ugyanaz. Tehát igazságos az osztozkodás, ha mindegyik testvér egy-egy darabot kap az *ABC* és az *ACD* háromszögből is. (5 pont)

b) A három testvér egy-egy darabot kap az *ABC* háromszögből, az *ACG* háromszöget 3 gyerek kaphatja, a *GCH* háromszöget ezután már csak 2 gyerek, ekkor a *HCB* háromszög egyértelműen a harmadiké, ez $3 \cdot 2 = 6$ lehetőség. (3 pont)
Ugyanígy az ADC háromszögben levő háromszögeket is 6-féleképpen oszthatják el. (1 pont)
Mivel mindegyik testvérnek mindkét nagy háromszögből kell kapni egyet-egyet, a lehetőségek száma: $3 \cdot 3 = 9$. Tehát 9-féleképpen osztozhatnak igazságosan az örökségen. (3 pont)

16. *a)* A számtani sorozat tagjai: a_1, $a_1 + d$, $a_1 + 2d$, ..., $a_{50} = a_1 + 49d$, a_{51}, $a_{51} + d$, $a_{51} + 2d$, ..., $a_{100} = a_{51} + 49d$. (1 pont)
Így az első 50 és a következő 50 tag különbsége: $50 \cdot (a_{51} - a_1) = 2500$. (2 pont)
Mivel $a_{51} = a_1 + 50d$, így $d = 1$. (2 pont)
Az első 50 tag összege: $50 \cdot \dfrac{2a_1 + 49}{2} = 200$, amiből $a_1 = -20{,}5$. Tehát a sorozat első tagja: $-20{,}5$. (2 pont)

b) Könnyebb dolgunk van, ha a répában maradt lé arányát számoljuk. Az első nyomás után a répában levő lé $\dfrac{3}{4}$ része marad benne, a második után a $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$, s.í.t., az *n*-edik nyomás után a $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ része marad benne, ennek kell $\dfrac{1}{3}$-nál kisebbnek lenni: $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n < \dfrac{1}{3}$. (3 pont)
Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve: $n \cdot \lg\dfrac{3}{4} < \lg\dfrac{1}{3}$, amiből $n > \dfrac{\lg\frac{1}{3}}{\lg\frac{3}{4}}$, mert $\lg\dfrac{3}{4} < 0$. Ebből $n > 3{,}8$. Tehát legalább 4 nyomás szükséges, hogy a répában levő lének

legalább $\frac{2}{3}$ részét kinyomjuk. (Erre az eredményre logaritmus nélkül, próbálgatással is eljuthatunk.) (2 pont)

Megjegyzés: Természetesen ugyanerre az eredményre juthatunk, ha a répából kinyomott lét számoljuk, az n-edik nyomás után ez:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+\ldots+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}{\frac{3}{4}-1}>\frac{2}{3}.$$

4. Feladatsor II. rész / B

17. *a)* A lányok számát L-lel, a fiúkét F-fel jelölve a lányok pontjainak összege $83L$, a fiúké $71F$, így az osztályátlag: $\frac{83L+71F}{L+F}=80.$ (4 pont)

Ebből $L=3F$, azaz a lányok száma 3-szorosa a fiúk számának. (2 pont)

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha meggondoljuk, hogy a fiúk átlagpontszáma 9-cel kevesebb, a lányoké 3-mal több, mint az osztályátlag. Így az osztálylétszám $4F$, aminek $3F$ a $\frac{3}{4}$ része, vagyis a 75%-a. Tehát a lányok száma 75%-a az osztálylétszámnak. (2 pont)

b) Ha valaki minden kérdésre helyesen válaszolt, $5\cdot 25=125$ pontot szerzett, ezért 127 pontot nem lehet szerezni, András biztosan tévedett. (2 pont)

A következő legmagasabb pontszám úgy lehetséges, ha valaki 24 kérdésre jó választ adott, 1-et üresen hagyott, ez $5\cdot 24+1=121$ pontot jelent. Tehát Bence biztosan tévedett, míg Csaba mondhatott igazat. (3 pont)

A következő legmagasabb pontszám úgy lehetséges, ha valaki 24 kérdésre jó választ adott, 1-re rosszat, ez 120 pontot ér.

A következő lehetséges pontszám 23 jó válasz és 2 üres esetén lehet, ez $23\cdot 5+2=$ $=117$. Ezért Dénes Biztosan tévedett. (2 pont)

23 jó, 1 üres, 1 rossz válasz 116 pont, 23 jó, 2 rossz válasz 15 pont, ezért Endre mondhatott igazat. (2 pont)

18. A Földön levő vizek $51{,}37+25{,}2+20{,}72=97{,}29$%-a sós víz. (Másképp: $100-2{,}71=$ $=97{,}29$%).

Így a sós víz térfogata $0{,}9729\cdot 1387{,}5\cdot 10^{15}\approx 1350\cdot 10^{15}\ \mathrm{m}^3=1{,}35\cdot 10^{18}\ \mathrm{m}^3$, a maradék édesvíz térfogata $37{,}5\cdot 10^{15}\ \mathrm{m}^3$. (5 pont)

A sós víz tömege: $1035\cdot 1{,}35\cdot 10^{18}=1397{,}25\cdot 10^{18}\approx 1{,}397\cdot 10^{21}$ kg.

Az édesvíz tömege: $1000\cdot 37{,}5\cdot 10^{15}\approx 0{,}038\cdot 10^{21}$ kg.

Tehát a Földön levő víz tömege: $1{,}435\cdot 10^{21}$ kg. (4 pont)

A feladat megoldásából láthatjuk, hogy a Földön levő víz tömege nagyobb, mint a levegőé.

19. *a)* A torony alapjánál $y=0$, ez akkor lehet, ha $\frac{x}{62{,}5}=1$, azaz $x=62{,}5$ m. A torony szélessége ennek kétszerese, azaz 125 m. (3 pont)

b) A 2. szinten y = 115,75, így $115{,}75 = -91 \cdot \ln\dfrac{x}{62{,}5}$, amiből $x = 62{,}5 \cdot e^{-\frac{115{,}75}{91}} \approx$ $\approx$ 17,52 m. Ez a torony szélességének fele, így a 2. szinten a torony szélessége: 35,04 m $\approx$ 35 m. (5 pont)

c) A toronyból a horizonthoz vezető szakasz a gömböt érinti, így a következő ábrát rajzolhatjuk, ahol a kör a földgömb középpontján átmenő síkmetszete, HT a kör érintője, OH a sugara, OT pedig a Föld sugaránál a terasz magasságával nagyobb. Így a Pitagorasz-tétel alapján:

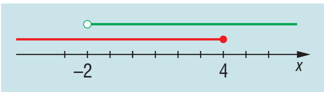
$$HT^2 = 6370276^2 - 6{,}37^2 \cdot 10^{12} = 40{,}5804 \cdot 10^{12} - 40{,}5769 \cdot 10^{12} = 35 \cdot 10^8,$$

amiből $HT = 5{,}916 \cdot 10^4$ m $\approx 60 \cdot 10^3$ m. Tehát a 3. szinten levő teraszról 60 km-re lehet ellátni. (9 pont)

5. Feladatsor I. rész

1. 33 600 Ft

2. *a)* Tekintsünk el először $x \in \mathbb{Z}$ kitételtől!



6 ilyen szám létezik, mivel $x \in \mathbb{Z}$.
–1; 0; 1; 2; 3; 4

b) Végtelen sok ilyen egész szám létezik. $x \in \mathbb{Z}$; $x \in \,]-\infty; \infty[$

3. $\underset{\smile}{2}\;\smile\;\smile\;\smile\;\smile$

A tízezresek helyén csak 2 állhat, mert 20 000-nél nagyobbak a keresett számok. A maradék négy helyen bármely szám a 0; 1; 1; 3 szám közül. Ők $\dfrac{4!}{2!}$ féle számot képezhetnek, tehát 12-félét.

4. *a)* $\log_2 \dfrac{1}{4} + \log_2 8 = -2 + 3 = 1;$

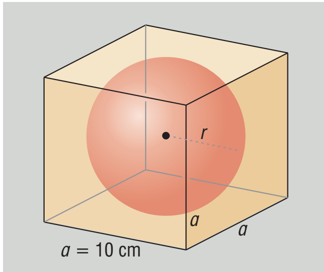
b) $2^{\frac{3}{5}}$.

5. A térfogat V = 3 dl = 0,3 dm^3, a pohár magassága 1 dm.
A henger térfogatképletébe helyettesítve: $0{,}3 = r^2 \cdot \pi \cdot 1 \Rightarrow r \approx 0{,}3090$ dm, tehát 0,3090 dm sugarú körnél nagyobb kör alakú alátét szükséges.

6. A feladat megoldható algebrai vagy grafikus úton. (lásd 1. Feladatsor I. rész, 12 feladat)
$x \in \,]-1; 5[$

7. A gömb átmérője megegyezik a kocka élének hosszával.

$$V_{\text{gömb}} = \frac{4r^3\pi}{3} \approx 523{,}6\ \text{cm}^3.$$



8. Az x tengelymetszetnél a kör egyenletébe helyettesítendő az $y = 0$, valamint y tengelymetszetnél az $x = 0$ érték. Így a kör tengelymetszeteire 3 megoldást kapunk:

$$M_1(0;\ 0);\ \ M_2(16;\ 0);\ \ M_3(0;\ 12).$$

9. A klasszikus valószínűséggel:

$$P(\text{fiú lesz a kiválasztott felelő}) = \frac{\text{kedv. eset}}{\text{összes eset}} = \frac{\binom{15}{1}}{\binom{25}{1}} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

10. A négyzetgyök alatt nemnegatív szám állhat, ezért az ÉT: $x^2 - 4 \geq 0$, vagyis $x \leq -2$ vagy $x \geq 2$, másként: $x \in \,]-\infty; -2] \cup [2; \infty[\ \ (x \in \mathbb{R})$, az ÉK: $y \in \mathbb{R};\ y \geq 0$.

11. Számtani sorozat:

$a_1 = 15$
$d = 3$
$a_n = 30$

$n = ?$

$n = 6$. A 6. sorban lesz kétszer annyi szék, mint az elsőben.

12. Készítsünk táblázatot a kedvező esetek számításához!

1. dobokocka (oszlopok); 2. dobokocka (sorok)

×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

$$P(\text{a dobott számok szorzata páratlan}) = \frac{\text{kedv. eset}}{\text{összes eset}} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

5. Feladatsor II. rész / A

13. *a)* 25 induló 1., 2., 3., ..., 8. helyett lehet:

$$25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18=\frac{25!}{(25-8)!}\text{-féle képpen.}$$

b) Dobogós (1., 2., 3. hely):

$$25\cdot 24\cdot 23=\frac{25!}{(25-3)!}.$$

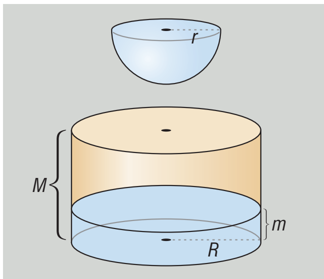
14. *a)* Az adott exponenciális egyenlet mindkét oldalát azonos (kettes) alapra hozzuk, így $2^{x+3}=2^{2x+4}$ egyenletet kapjuk.
Mivel az exp. függvény szigorúan monoton, ezért $x+3=2x+4$ megoldása $x=-1$.

b) A $\sqrt{(x-2)^2}=\sqrt{x-2}$ egyenlet értelmezési tartománya a jobb oldalon álló kifejezés miatt x >= 2.
A feldat átfogalmazandó $|x-2|=\sqrt{x-2}$ formában,majd felírva

$$|x-2|=\begin{cases}x-2, & \text{ha } x\ge 2\\ -x+2, & \text{ha } x<2\end{cases}$$

definíciót belátható, hogy a jobb oldal értelmezési tartománya miatt, csak az $x-2=\sqrt{x-2}$ egyenletet kell megoldanunk, melynél négyzetre emelés, átrendezés utáni másodfokú egyenlet gyökei: $x_1=3$ és $x_2=2$. Az értelmezési tartománynak mindkét eredmény megfelel.

15. Rajzoljunk, vegyük fel az adatokat, majd számoljunk!



$r=21$ cm

$$V_{\text{félgömb}}=\frac{4r^3\pi}{6}\approx 19396{,}2\ \text{cm}^3\ (6174\pi\ \text{cm}^3)$$

$R=50$ cm

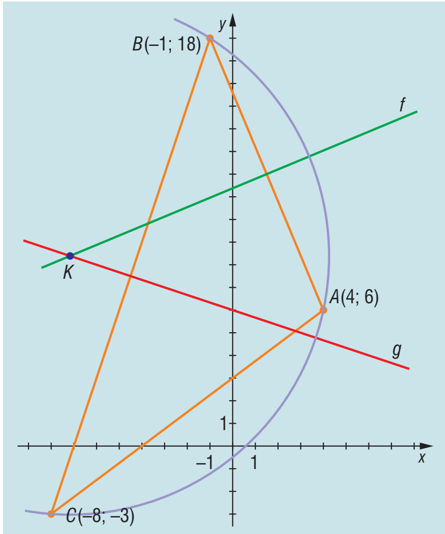
$$V_{\text{henger}}=R^2\cdot\pi\cdot m=2500\pi\cdot m$$

helyettesítve az előbb kapott 6174π térfogatot:

$$6174\pi=2500\pi\cdot m,$$

amiből $m=2{,}4696\ \text{cm}\approx 2{,}5$ cm.
Kb. 2,5 cm magasan áll a henger alakú edénybe áttöltött folyadék.

16. Rajzoljunk!



A háromszög köré írható kör egyenletéhez szükséges a keresett kör középpontja és a kör sugara.

A háromszög köré írható kör középpontját a háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja adja.

Terv:

1. felírjuk f egyenletét (AB szakaszfelező merőlegese)
2. felírjuk g egyenletét (BC szakaszfelező merőlegese)
3. $f \cap g = K$
4. $d_{AK} = r$
5. kör egyenletének felírása

Számoljunk!

1. $f \begin{cases} \nearrow \text{vektor: } \vec{v}_{AB}(-5;12) = \vec{n}_f(-5;12) \\ \searrow \text{futópont: } P_0\text{: } F\left(\dfrac{3}{2};12\right) \end{cases} \Rightarrow f\text{: } 10x - 24y = -273$

2. $g \begin{cases} \nearrow \text{vektor: } \vec{v}_{CB}(7;21) = \vec{v}_{CB}(1;3) = \vec{n}_g(1;3) \\ \searrow \text{futópont: } P_0\text{: } G\left(-\dfrac{9}{2};\dfrac{15}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow g\text{: } x + 3y = 18$

3. $f \cap g = K$

$$\left.\begin{aligned} 10x - 24y &= -273 \\ x + 3y &= 18 \end{aligned}\right\} \text{egy. r}$$

$$K\left(\overset{u}{-\frac{129}{18}};\overset{v}{\frac{151}{18}}\right)$$

4. $d_{AK} = r = \sqrt{\left(4 + \dfrac{129}{18}\right)^2 + \left(6 - \dfrac{151}{18}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{42250}{18^2}} = \dfrac{\sqrt{42250}}{18} \approx 11{,}42$

5. kör egyenlete: $\left(x + \dfrac{129}{18}\right)^2 + \left(y - \dfrac{151}{18}\right)^2 = \dfrac{42250}{324}$

5. Feladatsor II. rész / B

17. A betett alaptőke: $t_0 = 2\ 000\ 000$ Ft. Számoljuk ki a bank által kínált kamatokkal 3 év múlva járó összegeket a kétféle befektetésnél.

1. befektetés sávos kamatozással a következőket fizeti:

1. év végére: $1\ 000\ 000 \cdot 1{,}05 + 1\ 000\ 000 \cdot 1{,}065 = 2\ 115\ 000$ Ft
2. év végére: $1\ 000\ 000 \cdot 1{,}05 + 1\ 000\ 000 \cdot 1{,}065 + 115\ 000 \cdot 1{,}07 = 2\ 238\ 050$ Ft
3. év végére: $1\ 000\ 000 \cdot 1{,}05 + 1\ 000\ 000 \cdot 1{,}065 + 238\ 050 \cdot 1{,}07 = 2\ 369\ 713{,}5$ Ft

2. befektetés

1. év végére: $2\ 000\ 000 \cdot 1{,}017^4$
2. év végére: $2\ 000\ 000 \cdot 1{,}017^8$
3. év végére: $2\ 000\ 000 \cdot 1{,}017^{12} = 2\ 448\ 394{,}7$ Ft

A 2. befektetést érdemes választani.

18. *a)* Egyenes arányossággal kapott %-ok a következők:

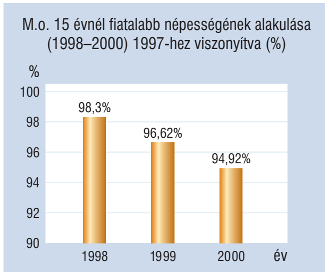
1997 → 1998: ≈ 98,31%
1997 → 1999: ≈ 96,62%
1997 → 2000: ≈ 94,92%

b) $1\ 797\ 606 \cdot x^3 = 1\ 706\ 370$

$x = 0{,}982787 \approx 98{,}27\%$

Átlagos csökkenés: 1,72% (pontosan 1,7212631%)

c) 2020-ra: $1\ 706\ 370 \cdot 0{,}982787^{20} \approx 1\ 205\ 761$ fő lesz.



19. *a)* M = test magassága

m = oldallap magassága

$T_{tm} = 1400$ cm^2

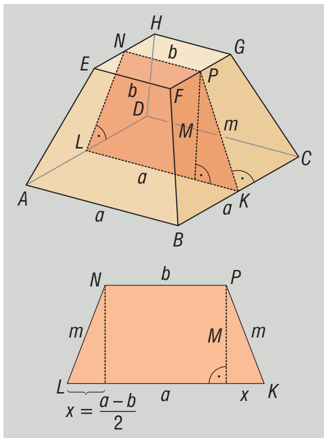
$a = 60$ cm

$b = 10$ cm

$x = 25$ cm

A szimm. trapéz területének segítségével megkapható a test magassága (M), amely egyben a trapéz magassága is.

$$1400 = \frac{60+10}{2} \cdot M \;\Rightarrow\; M = 40 \text{ cm}$$



b) A bura térfogata számítandó: $V = \frac{M}{3}\left(T + \sqrt{Tt} + t\right)$.

Mivel a két tengelymetszet egybevágó szimm. trapéz, ezért négyzetalapú csonkagúláról van szó. Így $T = a^2 = 3600$ cm^2 és $t = b^2 = 100$ cm^2, valamint $\sqrt{Tt} = 60 \cdot 10 = 600$ cm^2; így $V = 57333{,}3$ cm^3.

c) Számoljuk ki a lámpa burájához szükséges csonkagúla palást területét, amely egy oldallap területének négyszerese. Pitagorasz tételével kapható $m = 47{,}17$ cm.

$$T_{\text{oldallap}} = \frac{60+10}{2} \cdot 47{,}17 \approx 1650{,}946 \text{ cm}^2$$

$T_{\text{palást}} = 4 \cdot 1650{,}946 \approx 6603{,}78$ cm^2

10%-ot rászámolva az anyagszükséglet: $6603{,}78 \cdot 1{,}1 = 7264{,}165$ cm^2.