

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2012. május 8.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

**NEMZETI ERŐFORRÁS
MINISZTERIUM**

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1. a)		
A második két egyenlet által alkotott egyenletrendszerből kiszámítható a és b értéke. A két egyenlet megfelelő oldalait összeadva kapjuk, hogy $2a^2 = 6$, azaz $a = \sqrt{3}$ ($a > 0$).	2 pont	<i>Az a értékéért.</i>
$b^2 = 4 - 3 = 1$, azaz $b = 1$.	1 pont	<i>A b értékéért.</i>
$c = 2$. (A háromszög oldalai $\sqrt{3}$; 1 és 2 egység hosszúságúak.)	1 pont	<i>A c értékéért.</i>
Összesen:	4 pont	

1. b)		
Mivel $1^2 + \sqrt{3}^2 = 2^2$,	1 pont	
a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján	1 pont	
a háromszög derékszögű, a leghosszabb oldallal, a c -vel szemben van a 90° -os szög.	1 pont	
$\sin \beta = \frac{1}{2}$, tehát $\beta = 30^\circ$,	1 pont	
így $\alpha = 60^\circ$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	
<i>Megjegyzés: Ha az oldalak alapján felismeri, hogy 60°-os derékszögű háromszögről van szó, de nem részletezi az indoklást, a teljes pontszámot kapja.</i>		

1. c)		
A beírt kör sugara kiszámítható a terület és a kerület felének hányadosaként: $r = \frac{t}{\frac{k}{2}}$.	1 pont	<i>Akkor is jár ez a pont, ha ez a gondolat csak a megoldás során jelenik meg.</i>
A háromszög területe a két befogó szorzatának fele: $\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.	1 pont	
$r = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1+2+\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \left(= \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right)$.	2 pont	
Összesen:	4 pont	<i>Ha a végeredményt csak közelítő értékkel adja meg, akkor legfeljebb 3 pontot kap.</i>

2. a)		
Kockával kétszer dobva 36-féleképpen lehetne (azonos valószínűséggel) a és b helyét kitölteni.	1 pont	
A dobás eredményei között csak az 1, a 2, a 3 és a 4 fordulhat elő. (Az a -t ezekből 4, a b -t már csak 3-féleképpen kaphatjuk.)	1 pont	
vagyis a kedvező kitöltések száma $3 \cdot 4 = 12$.	1 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

2. b)		
Felsoroljuk a négy halmaz elemeit:		
$A = \{14; 21; 28; 35; 42; 49; 56; 63; 70; 77; 84; 91; 98\}$. ($ A = 13$.)	1 pont	
$B = \{29; 58; 87\}$,	1 pont	
$C = \{14; 25; 38; 53; 70; 89\}$,	1 pont	
$D = \{13; 14; 17; 22; 29; 38; 49; 62; 77; 94\}$.	1 pont	
b1) Az $A \cup C$ elemszáma 17. (A 6 elemű C halmaznak és a 13 elemű A halmaznak pontosan két közös eleme van.)	1 pont	
b2) A $B \cap D$ elemszáma 1. (A B és a D halmaznak csak a 29 a közös eleme.)	1 pont	
b3) Felsoroljuk mindazokat a pozitív kétjegyű egészeket, amelyek a négy vizsgált halmazból pontosan kettőnek az elemei: 29; 38; 49; 70; 77.	2 pont	
Összesen:	8 pont	

Megjegyzések:

- Ha a b1) és b2) kérdésre azért rossz a válasz, mert az A , a B , a C és/vagy a D halmazok elemeit rosszul sorolta fel, de a hibásan megadott halmazával a halmazműveletet helyesen értelmezte, az 1-1 pont jár.
- Ha a b3) kérdésre adott válasz egy elemben tér el a helyestől, 2 pont helyett 1 pont adható.
- Ha a b3) kérdésre adott válasza azért rossz, mert rosszul adta meg az A , a B , a C és/vagy a D halmaz elemeit, újabb pontot ne veszítsen.
- Ha a vizsgázó megoldásában nem a fenti utat választja (nem sorolja fel az A - D halmazok elemeit), teljes pontszámot kellően indokolt megoldásra kapjon. Indoklás nélküli válaszok esetén megoldására 8 helyett legfeljebb 3 pontot kaphat.

3.																		
<i>Ha csak egyféle színűt rakunk vissza: 2 lehetőség.</i>	1 pont																	
<i>Ha mind a két szín szerepel: 1 piros és 5 kék visszarakásakor 1 lehetőség van, (hiszen az öt egyforma mindig egymás mellett lesz).</i>	2 pont																	
<i>2 piros és 4 kék visszarakásakor 3 lehetőség van, hiszen a 2 egyszínűt vagy egymás mellé rakjuk, vagy egy, illetve kettő másik választja el őket.</i>	1 pont																	
<i>3 piros és 3 kék visszarakásakor 4 lehetőség van, hiszen a 3 egyszínűt vagy egymás mellé rakjuk, vagy egy-egy, illetve kettő-egy másik választja el őket (ez utóbbi kétféleképpen lehetséges):</i>	1 pont	<i>Csak 1 vagy 2 jó lehetőség megadása (számbavétele) 1 pont. Hiányos indoklás 1 pont.</i>																
<table style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">P</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;">P</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">P P</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;">K K</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">K K</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;">P P</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">K</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;">K</td> </tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"> <td style="padding: 5px;">P</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;">P</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">K P</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;">K P</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">K K</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;">P K</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">P</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;">K</td> </tr> </table>	P	P	P P	K K	K K	P P	K	K	P	P	K P	K P	K K	P K	P	K	2 pont	<i>Csak 1 jó lehetőség megadása (számbavétele) 0 pont, 2 vagy 3 jó lehetőség megadása (számbavétele) 1 pont. Hiányos indoklás 1 pont.</i>
P	P																	
P P	K K																	
K K	P P																	
K	K																	
P	P																	
K P	K P																	
K K	P K																	
P	K																	
<i>4 piros és 2 kék visszarakásakor 3 lehetőség van. Az indoklás megegyezik a 2 + 4 esettel.</i>	1 pont	<i>Ezek a pontok járnak, ha azért hibás a válasza, mert a 2+4 és/vagy az 1+5 esetet rosszul számolta ki.</i>																
<i>5 piros és 1 kék visszarakásakor 1 lehetőség. Az indoklás megegyezik az 1 + 5 esettel.</i>	1 pont																	
<i>Összesen 14-féle elhelyezkedés lehetséges.</i>	1 pont																	
Összesen:	12 pont																	
<i>Megjegyzések:</i>																		
<i>1. Az eredmény jó rajzzal is indokolható.</i>																		
<i>2. Ha a vizsgázó kiszámolja, hogy hány lehetőség van a 6 piros, 5 piros – 1 kék, 4 piros – 2 kék, 3 piros – 3 kék esetben az elrendezésekre (és ezt helyesen is adja meg), majd az egészet megszorozza 2-vel, mert fordítva is lehet, akkor a 3 piros – 3 kék eseteket kétszer számolja, és ezért 2 pontot elveszít.</i>																		

4. a)		
$a_n = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7^3} \cdot \frac{1}{7^5} \cdot \dots \cdot \frac{1}{7^{2n-1}} = \frac{1}{7^{1+3+5+\dots+(2n-1)}}$	1 pont	
A 7 kitevője egy számtani sorozat első n tagjának összege,	1 pont	
amelynek első tagja 1, a különbsége 2.	1 pont	
$a_n = \frac{1}{7^{\frac{(1+2n-1)n}{2}}}$	1 pont	
$a_n = \frac{1}{7^{n^2}}$	1 pont	
Vizsgálandó az $\frac{1}{7^{n^2}} > 49^{-50}$ egyenlőtlenség. Mivel $49 = 7^2$, megoldandó az $\frac{1}{7^{n^2}} > \frac{1}{7^{100}}$.	1 pont	
$7^{n^2} < 7^{100}$.	1 pont	
Az $x \mapsto 7^x$ függvény szigorú monoton növekedése miatt	1 pont	
$n^2 < 100$.	1 pont	
A 100-nál kisebb legnagyobb négyzetszám a 81. A feltételeknek megfelelő legnagyobb természetes szám a 9.	1 pont	
Összesen:	10 pont	

4. b) első megoldás		
Az b_n egy olyan mértani sorozat első n tagjának az összege, amelynek az első tagja $\frac{1}{7}$ és a hányadosa $\frac{1}{7^2}$.	1 pont	<i>Akkor is jár ez a 2 pont, ha ezek a gondolatok csak a megoldás során jelennek meg.</i>
A $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ annak a mértani sornak az összege (s), amelyben az első tag $b = \frac{1}{7}$ és a $q = \frac{1}{7^2}$.	1 pont	
Mivel $ q < 1$, $s = \frac{b}{1-q} = \frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7^2}} \left(= \frac{7}{48} \right)$	1 pont	
A keresett határérték $\frac{7}{48}$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

4. b) második megoldás		
Az b_n egy olyan mértani sorozat első n tagjának az összege, amelynek az első tagja $\frac{1}{7}$ és a hányadosa $\frac{1}{7^2}$.	1 pont	<i>Akkor is jár ez a 2 pont, ha ezek a gondolatok csak a megoldás során jelennek meg.</i>
$b_n = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^5} + \dots + \frac{1}{7^{2n-1}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1 - \frac{1}{49^n}}{1 - \frac{1}{49}}$	1 pont	
$b_n = \frac{7}{48} \cdot \left(1 - \frac{1}{49^n}\right).$	1 pont	
$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{7}{48}$	1 pont	
Összesen:	4 pont	

II.

5. a)		
Az $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ egyenes az y tengelyt a $(0; \frac{1}{2})$,	1 pont	
az $y = 1$ egyenest a $(\frac{3}{2}; 1)$ pontban metszi.	1 pont	
A megfelelő P pontok a téglalaprak az $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ egyenes alatti részéből kerülhetnek ki.	1 pont	
Ennek a résznek a területe: $T_{j\ddot{o}} = 4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{29}{8}$.	1 pont	
(A geometriai valószínűség kiszámítása szerint) a keresett valószínűség $P = \frac{\frac{29}{8}}{4} = \frac{29}{32} (= 0,90625)$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

5. b1) első megoldás		
Marci a 4 szelvényét a 200 jegyből $\binom{200}{4}$ -féleképpen vehette meg.	1 pont	
A 200 tombolajegy között 10 nyerő szelvény van és 190 nem nyerő. Marci akkor nyer 1 tárgyat, ha a négy szelvénye közül pontosan egy van a 10 nyerő között, a másik három pedig a 190 nem nyerő között van.	1 pont	<i>Akkor is jár ez a pont, ha ez a gondolat csak a megoldás során jelenik meg.</i>
Ez $\binom{10}{1} \cdot \binom{190}{3}$ -féleképpen lehetséges.	2 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{190}{3}}{\binom{200}{4}} \approx 0,1739$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

5. b1) második megoldás		
A 200 jegyből a 10 nyerő szelvényt $\binom{200}{10}$ -féleképpen húzhatják ki.	1 pont	
A 200 tombolajegyből 4 van Marcinál, és 196 nincs nála. Marci akkor nyer 1 tárgyat, ha a 10 nyerő szelvény közül pontosan egy van nála, a további 9 pedig a 196 többi szelvény közül való.	1 pont	<i>Akkor is jár ez a pont, ha ez a gondolat csak a megoldás során jelenik meg.</i>
A kedvező esetek száma tehát: $\binom{4}{1} \cdot \binom{196}{9}$	2 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{196}{9}}{\binom{200}{10}} \approx 0,1739$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

5. b2) első megoldás		
A keresett esemény helyett az ellentett (komplementer) esemény valószínűségét számítjuk ki. A Marci nyert a tombolán esemény ellentett eseménye az, hogy Marci nem nyert a tombolán.	1 pont	<i>Akkor is jár ez a 2 pont, ha ezek a gondolatok csak a megoldás során jelennek meg.</i>
Ez úgy volt lehetséges, hogy mind a 4 szelvénye a 190 nem nyerő szelvény közül való volt.	1 pont	
Az összes egyenlően valószínű kimenetek száma $\binom{200}{4}$	1 pont	
Ezek közül a kedvezők száma $\binom{190}{4}$.	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy Marci nem nyert a tombolán $\frac{\binom{190}{4}}{\binom{200}{4}} (\approx 0,8132)$.	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy Marci nyert a tombolán $1 - \frac{\binom{190}{4}}{\binom{200}{4}} \approx 0,1868$.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

5. b2) második megoldás		
Marci a 10 nyeremény közül 1, 2, 3 vagy 4-et nyerhetett.	1 pont	<i>Akkor is jár ez a pont, ha ez a gondolat csak a megoldás során jelenik meg.</i>
Annak valószínűsége, hogy egy szelvénye nyert $\frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{190}{3}}{\binom{200}{4}} \approx 0,1739.$	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy két szelvénye nyert $\frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{190}{2}}{\binom{200}{4}} \approx 0,0125.$	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy három szelvénye nyert $\frac{\binom{10}{3} \cdot \binom{190}{1}}{\binom{200}{4}} \approx 0,0004.$	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy négy szelvénye nyert $\frac{\binom{10}{4} \cdot \binom{190}{0}}{\binom{200}{4}} \approx 0,0000.$	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy Marci nyert a tombolán, ezen négy valószínűség összege 0,1868.	1 pont	
Összesen:	6 pont	
<p><i>Ha az b1) második megoldásában leírt eseménytérrel dolgozik, vagyis azt vizsgálja, hogy a 10 nyerő szelvény közül 1, 2, 3 vagy 4 darab lehetett Marcié, akkor a keresett valószínűséget az alábbi összeg adja meg:</i></p> $\frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{196}{9} + \binom{4}{2} \cdot \binom{196}{8} + \binom{4}{3} \cdot \binom{196}{7} + \binom{4}{4} \cdot \binom{196}{6}}{\binom{200}{10}}.$		

6. a) első megoldás		
A tengelypont koordinátái alapján f grafikonjának egyenlete: $y = a(x - 4)^2 + 2$.	2 pont	
P is illeszkedik a grafikonra, ezért $4a + 2 = 0$,	1 pont	
ahonnan $a = -\frac{1}{2}$.	1 pont	
Így $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 2 = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$,	1 pont	
ahonnan $b = 4$, $c = -6$.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

6. a) második megoldás		
Az f grafikonja parabola, keressük az egyenletét $y = ax^2 + bx + c$ alakban. A tengelypont $T(4; 2)$ koordinátái kielégítik ezt az egyenletet: (1) $16a + 4b + c = 2$.	1 pont	
Az ismert parabolapont $P(2; 0)$ koordinátái kielégítik a parabola egyenletét: (2) $4a + 2b + c = 0$.	1 pont	
Parabolánk szimmetriatengelye az $x = 4$ egyenes, ezért az adott P parabolapont tükörképe, az $R(6; 0)$ pont is illeszkedik a grafikonra. Ezért: (3) $36a + 6b + c = 0$.	1 pont	
Megoldva az (1)-(2)-(3) egyenletrendszer: $a = -\frac{1}{2}$; $b = 4$; $c = -6$.	3 pont	
Összesen:	6 pont	

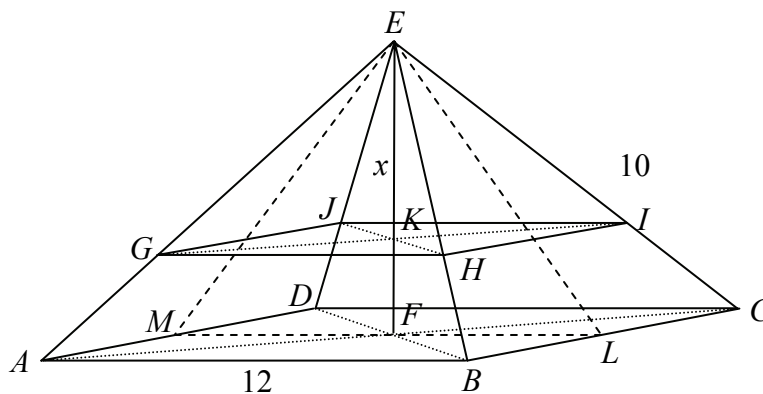
6. b)		
A megfelelő érintő irántangense f deriváltjának az $x = 3$ helyen felvett értéke.	1 pont	<i>Akkor is jár ez a pont, ha ez a gondolat csak a megoldás során jelenik meg.</i>
$f'(x) = -x + 4$, így $m = f'(3) = 1$.	1 pont	
Az $y = x + d$ egyenletű érintő illeszkedik f grafikonjának 3 abszcisszájú pontjára, amelynek második koordinátája $f(3) = \frac{3}{2}$.	1 pont	
Ezt felhasználva $d = -\frac{3}{2}$.	1 pont	
Az érintő egyenlete: $y = x - \frac{3}{2}$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

6. c)		
f zérushelyei 2 és 6,	1 pont	
ezért a keresett terület: $T = \int_2^6 f(x) dx = \int_2^6 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 \right) dx =$	1 pont	
$= \left[-\frac{1}{6}x^3 + 2x^2 - 6x \right]_2^6 =$	1 pont	
$= (-36 + 72 - 36) - \left(-\frac{4}{3} + 8 - 12 \right).$	1 pont	
$T = \frac{16}{3}.$	1 pont	
Összesen:	5 pont	

7.		
A logaritmus értelmezése miatt $x > 0$.	1 pont	<i>Ezt a pontot akkor is megkapja a vizsgázó, ha az eredeti egyenletbe behelyettesítve ellenőrzi a gyököket.</i>
$(3^{\log_3 x})^{\log_3 x} = x^{\log_3 x}$	1 pont	
$(x^2)^{\log_3 x} = (x^{\log_3 x})^2$	1 pont	
Legyen $y = x^{\log_3 x}$ (, ahol $y > 0$).	1 pont	
Ekkor az egyenlet $6y = y^2 - 6075$, vagyis $y^2 - 6y - 6075 = 0$.	1 pont	
A gyökök: $y_1 = -75$, amely nem megoldása az eredeti egyenletnek,	1 pont	
és $y_2 = 81$.	1 pont	
Az y lehetséges értékéből $x^{\log_3 x} = 81$,	1 pont	
és innen $\log_3(x^{\log_3 x}) = \log_3 81 = 4$.	2 pont	
(A hatvány logaritmusára vonatkozó azonosság alapján:) $(\log_3 x)^2 = 4$.	1 pont	
Ha $\log_3 x = 2$,	1 pont	
akkor $x_1 = 3^2 = 9$.	1 pont	
Ha $\log_3 x = -2$,	1 pont	
akkor $x_2 = 3^{-2} = \frac{1}{9}$.	1 pont	
Mind a két szám megoldása az eredeti egyenletnek.	1 pont	
Összesen:	16 pont	

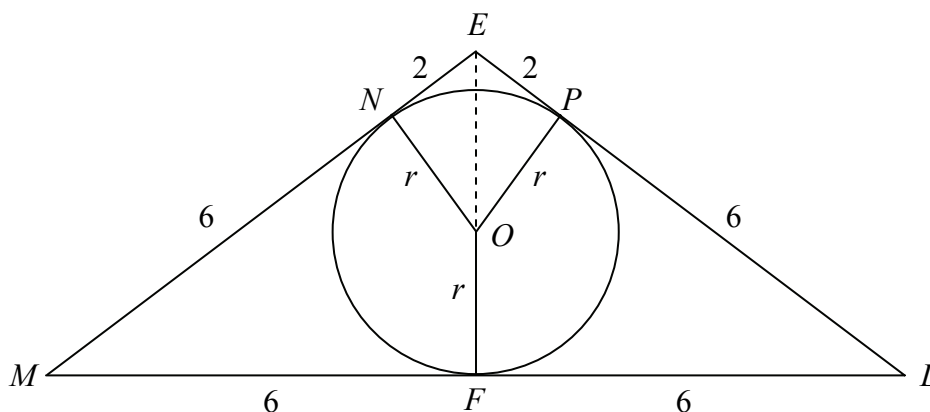
8.		
Legyen a kőszegi K csoport taglétszáma: k ; a tatai T csoporté: t ; míg a füredi F csoporté: f . Jelölje továbbá a K csoport tagjai életkorának összegét S_k ; a T csoportét S_t ; míg az F csoportét S_f .	2 pont	<i>Akkor is jár ez a 2 pont, ha ezek a gondolatok csak a megoldás során jelennek meg.</i>
Ekkor a következő egyenleteket lehet felírni a megadott adatokkal: $S_k = 37k$;	1 pont	
$S_t = 23t$;	1 pont	
$S_f = 41f$;	1 pont	
$S_k + S_t = 29(k + t)$;	1 pont	<i>A feladat megoldásához e három összefüggésből kettő is elegendő, ezért bármelyik kettő felírása is 3 pontot ér.</i>
$S_k + S_f = 39,5(k + f)$;	1 pont	
$S_t + S_f = 33(t + f)$.	1 pont	
Az első három összefüggést behelyettesítjük a következő három egyenletbe: $37k + 23t = 29(k + t)$, azaz $t = \frac{4}{3}k$.	1 pont	<i>A feladat megoldásához e három összefüggésből kettő is elegendő, ezért bármelyik kettő felírása is 3 pontot ér.</i>
$37k + 41f = 39,5(k + f)$, azaz $f = \frac{5}{3}k$.	1 pont	
$23t + 41f = 33(t + f)$, azaz $t = \frac{4}{5}f$.	1 pont	
Az összes dolgozó átlagéletkora: $\frac{S_k + S_t + S_f}{k + t + f}$.	1 pont	<i>Ha a háromismeretlenes egyenletrendszerben egy konkrét számhármassal számolva helyes eredményt kap, de nem bizonyítja, hogy ugyanerre az eredményre jutna minden gyök esetén, 2 pontot veszít.</i>
Ezekből t és f kifejezhető k segítségével, és akkor a következőt kapjuk a keresett átlagra: $\frac{37k + 23 \cdot \frac{4}{3}k + 41 \cdot \frac{5}{3}k}{k + \frac{4}{3}k + \frac{5}{3}k} = \frac{37 + \frac{92}{3} + \frac{205}{3}}{4} =$	2 pont	
$= \frac{37 + 99}{4} = \frac{136}{4} = 34.$	1 pont	
A cég összes dolgozójának átlagéletkora 34 év.	1 pont	
Összesen:	16 pont	

9. a)



<p>Az ábra jelöléseivel a $GHIJE$ gúla hasonló az $ABCDE$ gúlához.</p>	<p>1 pont</p>	
<p>$\frac{V_{ABCDE}}{V_{GHIJE}} = 2$, ezért a megfelelő szakaszok aránya (pl.): $\frac{AB}{GH} = \frac{FE}{KE} = \sqrt[3]{2}$.</p>	<p>2 pont</p>	
<p>$GH = \frac{AB}{\sqrt[3]{2}} = \frac{12}{\sqrt[3]{2}} (\approx 9,524)$. $4 \cdot GH = \frac{48}{\sqrt[3]{2}} (\approx 38,10)$. A színes vonalak összhossza: 38,10 m.</p>	<p>1 pont</p>	
<p>Pitagorasz tétele alapján az ABD derékszögű háromszögben: $BD = 12\sqrt{2}$. $FB = 6\sqrt{2}$</p>	<p>1 pont</p>	
<p>Pitagorasz tétele alapján az FBE derékszögű háromszögben: $(FE)^2 = 10^2 - (6\sqrt{2})^2$.</p>	<p>1 pont</p>	
<p>$FE = \sqrt{28} (= 2\sqrt{7} \approx 5,29)$</p>	<p>1 pont</p>	
<p>$KE = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt[3]{2}} \left(= \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt[3]{2}} \approx 4,2 \right)$</p>	<p>1 pont</p>	
<p>$FK = FE - KE = \sqrt{28} - \frac{\sqrt{28}}{\sqrt[3]{2}} \left(= \sqrt{28} \cdot \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2}} \approx 1,09 \right)$ A térfogatot felező sík 1,09 m távolságra van a terem padlójától.</p>	<p>1 pont</p>	
<p>Összesen:</p>	<p>9 pont</p>	

9. b) első megoldás



A mikrofont a gúlóba írt gömb O középpontjába kell elhelyezni.	1 pont	
Az ábrán az EL és az EM az oldallapok magassága. Pitagorasz tétele alapján az ELC derékszögű háromszögben: $(EL)^2 = 10^2 - 6^2$, ahonnan $EL = 8$.	1 pont	
Mivel külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, így $MF = MN = 6$, és $NE = 2$.	1 pont	
Pitagorasz-tétele alapján az OEN derékszögű háromszögben: $(OE)^2 = (ON)^2 + (NE)^2$.	1 pont	
$(\sqrt{28} - r)^2 = r^2 + 2^2$	1 pont	
$r = \frac{6}{\sqrt{7}} (\approx 2,27)$	1 pont	
A mikrofon távolsága az E ponttól: $EO = EF - OF = 5,29 - 2,27 = 3,02$ méter.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

9. b) második megoldás		
A mikrofont az O pontba kell elhelyezni. Ennek a pontnak a távolsága a gúla lapjaitól legyen x (méter). Az ábrán az EL az EBC oldallap magassága. Az O pontot összekötve az $ABCDE$ gúla csúcsaival, öt gúlára bontjuk az $ABCDE$ gúlát. Írjuk fel az $ABCDE$ gúla térfogatát az öt gúla térfogatának összegeként.	1 pont	
Az $ABEO$, a $BCEO$, a $DCEO$ és az $ADEO$ gúlák egybevágóak. Térfogatuk egyenlő. (1) $V_{ABCDE} = V_{ABCDO} + 4 \cdot V_{BCEO}$	1 pont	
$V_{ABCDE} = \frac{AB^2 \cdot EF}{3} = \frac{144 \cdot \sqrt{28}}{3} = 48 \cdot \sqrt{28}.$ $V_{ABCDO} = \frac{AB^2 \cdot x}{3} = \frac{144 \cdot x}{3} = 48x.$	1 pont	
$V_{BCEO} = \frac{T_{BCE} \cdot x}{3}.$ A BCE háromszög BC oldalához tartozó magasságát a BEL derékszögű háromszögből számolva: $EL = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$	1 pont	
$T_{BCE} = \frac{BC \cdot EL}{2} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48.$ Ezért $V_{BCEO} = \frac{T_{BCE} \cdot x}{3} = \frac{48 \cdot x}{3} = 16x.$	1 pont	
A térfogatokra kapott kifejezéseket az (1) egyenlőségbe beírva: $48 \cdot \sqrt{28} = 48x + 4 \cdot 16x = 112x,$ ahonnan $x = \frac{6\sqrt{7}}{7} \approx 2,27$ (m).	1 pont	
A mikrofon távolsága az E ponttól: $EO = EF - OF = 5,29 - 2,27 = 3,02$ méter.	1 pont	
Összesen:	7 pont	