OKTATÁSI MINISZTÉRIUM **KÖZÉPISKOLA**
2005. október

Elbírálási útmutató a hagyományos matematika érettségi vizsgához

1. (1325.) Ha egy tört számlálójából 1-et kivonunk, nevezőjéhez pedig 1-et hozzáadunk, értéke $\frac{1}{2}$, ha viszont számlálójához adunk 1-et és nevezőjéből vonunk ki 1-et, akkor értéke 1 lesz. Melyik ez a tört?

Megoldás:

Jelöljük a tört számlálóját x-szel, nevezőjét y-nal. 1 pont

A feltétel szerint

egyrészt $\frac{x-1}{y+1} = \frac{1}{2}$, másrészt $\frac{x+1}{y-1} = 1$. 2 pont

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása: $x = 5$ és $y = 7$. 4 pont

Ez valóban teljesíti a feltételeket, mert

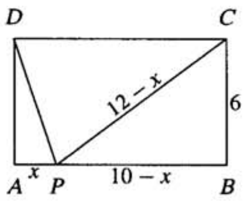
$$\frac{5-1}{7+1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \frac{5+1}{7-1} = \frac{6}{6} = 1.$$ 1 pont

Tehát az eredeti tört $\frac{5}{7}$. 1 pont

Összesen: 9 pont

2. (1832.) Az $ABCD$ téglalap oldalai $AB = 10$ cm, $BC = 6$ cm. Mekkora távolságra van D-től az AB oldalnak az a P pontja, amelyre $AP + PC = 12$ cm?

Megoldás:



Jelöljük az AP hosszát x-szel, 1 pont

ekkor

(1) $PB = 10 - x$

és $AP + PC = 12$-ből

(2) $PC = 12 - x$. 2 pont

A PBC derékszögű háromszögből Pitagorasz tétele miatt

$$PC^2 = PB^2 + BC^2,$$ 1 pont

ebbe helyettesítve (1)-et és (2)-t: $(12 - x)^2 = (10 - x)^2 + 6^2$,

amiből

$$x = 2$$ 3 pont

(és mivel $x < AB$, ezért P valóban az AB oldal belső pontja).

A keresett DP távolság meghatározható a DAP derékszögű háromszögből szintén Pitagorasz tételét felírva:

$$DP^2 = x^2 + 6^2,$$ 2 pont

és innen

$$DP = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} (\approx 6{,}32 \text{ cm}).$$ 1 pont

Tehát a P pont $2\sqrt{10}$ cm távolságra van a téglalap D csúcsától. 1 pont

Összesen: 11 pont

Megjegyzés. Ha csak kerekített értéket (6,32) ad meg a tanuló, akkor is kapja meg a teljes pontszámot.

3. (**3369.**) Határozza meg annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja az $O(-3; -2)$ pont, és érinti a $2x + y = 3$ egyenletű egyenest!

1. megoldás:

Az $O(-3; -2)$ középpontú, r sugarú kör egyenlete:

(1) $$(x+3)^2 + (y+2)^2 = r^2.$$ 2 pont

Az érintőnek egy közös pontja van a körrel, ezért az egyenes és a kör egyenletéből alkotott egyenletrendszernek csak egy megoldása lehet, ami lehetővé teszi az r paraméter meghatározását.

$$\left.\begin{aligned} (x+3)^2 + (y+2)^2 &= r^2 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}\right\}$$ 4 pont

Behelyettesítés és rendezés után a következő egyenletet kapjuk:

(2) $$5x^2 - 14x + 34 - r^2 = 0.$$ 3 pont

Az egyenes a kör érintője, ha a (2) egyenletnek egyetlen valós megoldása van. Ez pedig akkor és csak akkor teljesül, ha az egyenlet diszkriminánsa (D) nulla.

$$D = 14^2 - 20 \cdot (34 - r^2) = 0.$$ 3 pont

Ebből $r^2 = 24{,}2$. 1 pont

A keresett kör egyenlete:

$$(x+3)^2 + (y+2)^2 = 24{,}2.$$ 1 pont

Összesen: 14 pont

2. megoldás:

Az O pontból az érintőre bocsátott merőleges egyenes egyenlete:

$$x - 2y = 1.$$ 4 pont

Ennek az egyenesnek és az érintőnek a metszéspontja az érintési pont (E), ami az alábbi egyenletrendszerből kiszámítható:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

$$E(1{,}4; 0{,}2).$$ 4 pont

A sugár hossza az O és E pontok távolsága, ezért

$$r^2 = (-3 - 1{,}4)^2 + (-2 - 0{,}2)^2 = (-4{,}4)^2 + (-2{,}2)^2 = 24{,}2.$$ 3 pont

A kör egyenlete:

$$(x+3)^2 + (y+2)^2 = 24{,}2.$$ 3 pont

Összesen: 14 pont

4. (**3571.**) Egy mértani sorozat első három tagjának az összege 105, az első és a harmadik tag szorzata 400. Melyik ez a sorozat?

Megoldás:

A keresett mértani sorozat első három tagja legyen a_1, a_2, a_3.

A feltételek szerint:

(1) $$a_1 + a_2 + a_3 = 105$$

és

(2) $$a_1 \cdot a_3 = 400.$$ 2 pont

Mivel mértani sorozatról van szó, ezért $a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_1 \cdot q^2$, így

$$a_1 \cdot a_3 = a_1 \cdot a_1 q^2 = (a_1 q)^2 = a_2^2,$$

ezért

$$a_2 = \pm 20.$$ 3 pont

Ebből a következő egyenletek adódnak:

I. Ha $a_2 = 20$, akkor (1)-ből

$$a_1 + a_3 = 85$$

és (2)-ből

$$a_1 \cdot a_3 = 400.$$

Az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy

$$a_1^2 - 85a_1 + 400 = 0,$$

amiből

$$a_1 = 5 \quad \text{vagy} \quad a_1 = 80.$$

A megfelelő sorozatok hányadosai:

$$a_1 q = a_2, \quad \text{vagyis} \quad q = \frac{a_2}{a_1}$$

miatt $q = 4$ vagy $q = \frac{1}{4}$. 3* pont

II. Ha $a_2 = -20$, akkor az (1)-ből

$$a_1 + a_3 = 125$$

és (2)-ből

$$a_1 \cdot a_3 = 400$$

adódik.

Az egyenletrendszerből az alábbi egyenlet adódik:

$$a_1^2 - 125a_1 + 400 = 0,$$

és ebből

$$a_1 \approx 121{,}71 \quad \text{vagy} \quad a_1 \approx 3{,}2864,$$

illetve

$$q \approx -0{,}1643 \quad \text{vagy} \quad q \approx -6{,}0857.$$ 3* pont

A feladatnak megoldása mind a négy sorozat:

$a_1 = 5,$	$q = 4$	esetén	5; 20; 80; ...
$a_1 = 80,$	$q = \frac{1}{4}$	esetén	80; 20; 5; ...
$a_1 \approx 121{,}71$	$q \approx -0{,}16$	esetén	121,71; −20; 3,29; ...
$a_1 \approx 3{,}29$	$q \approx -6{,}09$	esetén	3,29; −20; 121,71; ...

4 pont

Összesen: 15 pont

Megjegyzés. a_2 kiszámítása után a megoldás így is folytatható:

I. Ha $a_2 = a_1 q = 20$ és $a_1 + a_1 q^2 = 85$, akkor

$$\frac{1+q^2}{q} = \frac{17}{4}, \quad \text{vagyis} \quad 4q^2 - 17q + 4 = 0.$$

Ebből q és a_1 meghatározható.

II. Ha $a_2 = a_1 q = -20$ és $a_1 + a_1 q^2 = 125$, akkor

$$\frac{1+q^2}{q} = -\frac{25}{4}, \quad \text{vagyis} \quad 4q^2 + 25q + 4 = 0.$$

Ebből q és a_1 meghatározható.

A befejezés megegyezik az ismertetett megoldással. A helyes kidolgozásért a *-gal jelzett 3-3 pont jár.

5. (**1554.**) Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! Ábrázolja a számegyenesen a megoldáshalmazt!

$$\log_3(x+3) > \log_3 2x.$$

Megoldás:

A logaritmus értelmezése miatt teljesülni kell annak, hogy egyrészt $x + 3 > 0$, azaz

(1) $$x > -3;$$

másrészt $2x > 0$, azaz

(2) $$x > 0.$$

Az (1) és (2) közös része az

(3) $$x > 0.$$ 3 pont

A $\log_3 x$ függvény szigorúan monoton nő, mert az alapja egynél nagyobb, ezért

$$x + 3 > 2x,$$ 2 pont

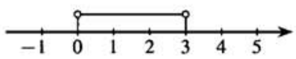
ahonnan

(4) $$x < 3$$

adódik. 1 pont

(3)-t és (4)-t összevetve az egyenlőtlenség megoldáshalmaza:

$$x \in]0; 3[.$$ 1 pont

Ábrázolva:  1 pont

Összesen: 8 pont

6. (**2490.**) Határozza meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az $\dfrac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos x}$ kifejezés értelmezhető!

Megoldás:

$\cos x$ értelmezhető, ha $x \in \mathbf{R}$. — 1 pont

$\operatorname{tg} x$ értelmezhető, ha $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, ahol $k \in \mathbf{Z}$. — 2 pont

A tört értelmezhető, ha a nevezője nem 0, azaz

$$\operatorname{tg} x \cdot \cos x \neq 0,$$ — 1 pont

ami egyenértékű azzal, hogy

$$\operatorname{tg} x \neq 0 \quad \text{és} \quad \cos x \neq 0,$$ — 2 pont

vagyis $$x \in \mathbf{R} \setminus \left\{m\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right\}, \qquad \text{ahol } m, n \in \mathbf{Z}.$$ — 2 pont

összevetve a feltételeket, a kifejezés értelmezett, ha

$$x \in \mathbf{R} \setminus \left\{p \cdot \frac{\pi}{2}; p \in \mathbf{Z}\right\}.$$ — 2 pont

Összesen: 10 pont

7. (**63.**) Bizonyítsa be, hogy a derékszögű háromszög befogója az átfogónak és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének a mértani közepe!

Megoldás:

Helyes és teljes bizonyításra 13 pontot kell adni.
Hiányos bizonyításért arányosan kevesebb pont jár.

Összesen: 13 pont

ÉRTÉKELÉS

Az elért pontszámokat a következőképpen váltjuk át osztályzatra:

0–17 pontig: elégtelen (1).

60 ponttól: jeles (5).

A jeles osztályzat alsó határától (60 pont) és az elégséges alsó határától (18 pont) alapos indokkal bizonyos esetekben legfeljebb ± 3 ponttal el lehet térni.

A közbülső osztályzatok a kialakult tanári gyakorlat alapján állapíthatók meg.

Az útmutatóban közölt megoldásoktól eltérő helyes megoldásra természetesen teljes pontszám jár, a részpontokat az egyes értékelhető részekre szintén arányosan kell megállapítani.

Ha az útmutató mást nem javasol, akkor egyszerű számolási hiba esetén azért a lépésért nem jár pont, amelyben a hibát elköveti a vizsgázó. A többi lépésért — amennyiben ezek helyes megoldás esetén is szerepelnek — a megfelelő részpontszámokat meg lehet adni.

Az elbírálási útmutatóban szereplő részpontszámok indokolt esetben tovább bonthatók. Minden feladatnak csak egy helyes megoldását értékeljük.

Ha a vizsgázó a dolgozat beadása előtt a feladat megoldásán változtat, akkor a változtatásnak egyértelműnek, világosnak kell lennie. A tanárnak az új, illetve nem áthúzott megoldást kell értékelnie.

A dolgozat végén a tanár tüntesse fel az egyes feladatokra adott pontszámokat és azok összegét, az annak megfelelő minősítést, majd mindezt lássa el aláírásával!